CONTEXTOS EDUCATIVOS, 35 (2025): 59-85. http://doi.org/10.18172/con.6463

COMPETENCIAS Y DIFICULTADES DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS ANTE UN PROBLEMA QUE INVOLUCRA LA CONJETURA Y LA DEMOSTRACIÓN

Bettina Milanesio
Universidad Complutense de Madrid
bmilanes@ucm.es

María Burgos
Universidad de Granada
mariaburgos@ugr.es

RESUMEN: A pesar de la importancia de la demostración para el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes, cómo se produce su aprendizaje continúa siendo un reto tanto para los investigadores en educación matemática como para los propios profesores. En este trabajo, analizamos la competencia de estudiantes de primer curso universitario para resolver un problema que involucra la conjetura y demostración de propiedades aritméticas. Adoptando un enfoque metodológico esencialmente cualitativo, articulamos el modelo de Toulmin con herramientas del Enfoque ontosemiótico para caracterizar y analizar las prácticas. Específicamente, identificamos los objetos y procesos implicados en las argumentaciones, relacionándolos con los elementos del modelo de Toulmin y estudiamos el grado de generalización logrado. Esta articulación nos permite desarrollar una mirada más profunda de las competencias de los estudiantes con la demostración y las dificultades encontradas. Los resultados muestran que, si bien la mayoría de los estudiantes emplea argumentaciones deductivas correctas para validar o refutar conjeturas que están explícitas en los enunciados, encuentran diversas dificultades al formular conjeturas que no lo están y al desarrollar sus demostraciones. Además, muchos estudiantes no logran el grado de formalización esperado en el nivel universitario, y cuando lo alcanzan no necesariamente implica mayor pertinencia en la solución. Estos resultados muestran que la formación recibida hasta el momento no fue suficiente para lograr un conocimiento sólido de la demostración. Se concluye la necesidad de prestar atención a cómo se aborda la demostración en los procesos instruccionales actuales para abordar las dificultades identificadas y generar oportunidades de aprendizaje significativo.

PALABRAS CLAVE: conjetura, demostración, modelo de Toulmin, enfoque ontosemiótico, estudiantes universitarios.

COMPETENCIES AND DIFFICULTIES OF UNDERGRADUATE STUDENTS FACING A PROBLEM INVOLVING CONJECTURE AND PROOF

ABSTRACT: Despite the importance of proof for developing students' mathematical competence, understanding how its learning occurs remains a challenge for both researchers in Mathematics Education as well as teachers. In this study, we analyze the competence of first year university students in solving a problem involving the conjecture and proof of arithmetic properties. Adopting a predominantly qualitative methodological approach, we integrate the Toulmin's model with tools from the Onto-semiotic Approach to characterize and analyze the practices developed by students. Specifically, we identify the objects and processes involved in the argumentations, relating them to the elements of the Toulmin's model, and examine the degree of generalization achieved. This integration enables us to gain deeper insight into students' competencies with proof and the difficulties they encounter. The results of our study show that, while most students use correct deductive argumentations to validate or refute conjectures explicitly stated in the given problem, they face significant difficulties when formulating conjectures that are not explicitly provided and in developing their proofs. Furthermore, many students fail to achieve the expected level of formalization at the university level, and when they do, it does not necessarily translate to greater relevance in their solutions. These findings indicate that the instruction that the students have received thus far has been insufficient to develop a solid understanding of proof. We conclude by emphasizing the need to focus on how proof is addressed in current instructional processes to tackle the identified difficulties and to create opportunities for meaningful learning.

KEYWORDS: conjecture, proof, Toulmin’s model, ontosemiotic approach, undergraduate students.

Recibido: 11/12/2024

Aceptado: 12/03/2025

EXTENDED ABSTRACT

The study of mathematical proof has aroused great interest among mathematics education researchers in recent decades. Proof is not only important for the discipline itself but also for developing mathematical competence in students. However, how proof is learned remains a challenge for both mathematics education researchers and teachers.

Although several authors indicate the relevance of introducing students to proof by posing conjectures, there are few studies that explore how students solve problems involving conjecture and proof in a university context.

This study is part of a larger work in which we analyze the progress of a group of first-year Argentine university students pursuing physics and mathematics degrees. These students were enrolled in the Discrete Mathematics course (year 2023), which has proof as a specific curricular objective. A problem was posed halfway through the course, in which the argumentation was first presented based on examples and counterexamples involving arithmetic properties of divisibility, to facilitate the formulation of a conjecture in this context and its proof.

We adopted an essentially qualitative, exploratory methodology, aiming to describe and interpret students' skills and difficulties with proof. We employed content analysis of the students' reports, based on Toulmin's model and the analysis categories of the ontosemiotic approach (practices, objects, processes, degree of generalization). The descriptive analysis of the participants' practices consisted of categorizing the types of argumentations according to the elements of Toulmin's model, identifying the objects and processes involved in the argumentations, relating them to the elements of Toulmin's model and studying the degree of generalization achieved in the students' argumentative practices. This analysis subsequently allowed us to assess the adequacy of the students' solutions, characterize their competencies with the proof, and explain the difficulties encountered in terms of the complexity of the objects and processes involved in the argumentative structures and their degree of generalization.

The results show that most students use correct deductive argumentations to prove true propositions that are explicit in the statements, as well as appropriate deductive by counterexample argumentations to refute false propositions, which are also exposed in the statements. To a lesser extent, students develop incorrect inductive argumentations in which they corroborate the conjectures in one or more specific cases to ensure their general validity. When the statement involves constructing and proving a conjecture, students show greater difficulties. On the one hand, a considerable increase in responses without justification of the emerging conjectures is observed. On the other hand, incorrect solutions increase, in which students formulate inadequate conjectures and propose inappropriate argumentations to prove them, mostly deductive, but also abductive and inductive.

Furthermore, many students do not achieve the level of formalization expected at the university level, and when they do, it does not necessarily imply greater pertinence in the solution.

The difficulties identified in this study have been recognized by some researchers as factors constituting obstacles to successfully addressing the intended proofs and achieving the level of generalization expected at the university level. On the one hand, the use of inductive or abductive argumentations to prove, as well as the formulation of unjustified conjectures, reveals difficulties related to the interpretation of the elements that are necessary and sufficient to develop a proof. These practices have also been frequently evidenced by incoming university or first-year students. On the other hand, there is a lack of fundamental arithmetic knowledge that they should have acquired in their secondary education, as well as a lack of skills in using logical rules or properties, which leads to inadequate proofs. The fact that the practices are algebraic in these cases shows that a greater degree of sophistication does not necessarily imply greater pertinence in the solution.

Compared to a previous study conducted at the beginning of these students' training, we observed some improvement in their competence to develop proofs of propositions, such as those involved in items where the conjecture to be proved is explicit in the statement, since the previous results were dominated by inductive or explanatory abductive argumentations. However, a high frequency of unjustified conjectures continues to be observed in items where students are expected to review and use previous argumentation as available knowledge to develop a conjecture and prove it.

This work reveals that the training received to date has not been sufficient to achieve consolidated learning of proof. With this, we aim to highlight the need to focus on current instructional processes to address the identified difficulties and exploit quality learning opportunities in the practice of proof.

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la demostración matemática ha suscitado gran interés en las últimas décadas por parte de los investigadores en educación matemática (Stylianides et al., 2023). La demostración no solo es importante para la propia disciplina, sino también para desarrollar la competencia matemática en los estudiantes (Stylianides et al., 2023). Por ello, resulta esencial que los estudiantes aprecien, comprendan y produzcan demostraciones a lo largo de su educación matemática (Weber et al., 2020).

Una preocupación constante en el campo de la educación matemática es que muchos estudiantes no reconocen qué constituye una demostración o por qué es necesaria (Aricha-Metzer y Zaslavsky, 2019). Por un lado, esto motiva la propuesta de cualquier argumento que resulte convincente y su aceptación como una demostración válida, por ejemplo, el sobreuso de casos particulares (Buchbinder y Zaslavsky, 2019). Por otro lado, la falta de competencias en el uso del lenguaje matemático, el conocimiento de las reglas lógicas, la capacidad para aplicar conceptos y propiedades dadas limita la propuesta de argumentos lógicamente sólidos que respalden la validez de conjeturas (Varghese, 2017).

Los autores que han reflexionado sobre posibles modos de abordar estas dificultades (Ellis et al., 2022; Mariotti y Pedemonte, 2019), consideran que la demostración es más accesible para los estudiantes cuando los problemas que se plantean requieren la construcción de una conjetura. Pese a esto, son escasos los estudios que exploran cómo los estudiantes resuelven problemas que involucran la conjetura y la demostración en un entorno universitario (Lew y Zazkis, 2019). Además, las investigaciones que señalan la importancia de la demostración para fomentar la competencia matemática en los estudiantes destacan que la capacidad para demostrar depende y se nutre de la capacidad para generalizar (Fredriksdotter et al., 2022).

La literatura destaca la potencialidad del modelo de Toulmin (2003) para analizar los argumentos que surgen en la elaboración y demostración de conjeturas, así como para documentar las dificultades de estudiantes (Arce y Conejo, 2019; Molina y Samper, 2019; Soler-Álvarez y Manrique, 2014). Sin embargo, algunos investigadores han señalado que, si bien este modelo es útil para revelar la estructura de la argumentación implicada, es decir, para comprenderla como producto, resulta insuficiente para considerarla como proceso que a su vez involucra otros procesos (Reuter, 2023). En este sentido, el Enfoque ontosemiótico (EOS) ofrece herramientas que posibilitan analizar las prácticas argumentativas de los estudiantes desde el punto de vista de los objetos y procesos involucrados (Godino, 2024). Unos primeros avances pueden consultarse en Milanesio y Burgos (2024), Molina et al. (2019) o Morales-Ramírez et al. (2021).

En este trabajo nos proponemos caracterizar las prácticas matemáticas desarrolladas por estudiantes argentinos de primer curso universitario cuando resuelven un problema que involucra la formulación de conjeturas y la demostración. Intentamos aportar conocimientos fundamentados acerca de la siguiente hipótesis: superar las dificultades y lograr la competencia en el desarrollo de demostraciones matemáticas requiere de una formación prolongada a lo largo de toda la educación universitaria.

Para llevar a cabo el análisis, empleamos de manera articulada el modelo de Toulmin (2003), el análisis ontosemiótico (Godino, 2024) y el estudio del grado de generalización (Autor et al., 2024). Este análisis microscópico pretende caracterizar las competencias con la demostración y explicar las dificultades encontradas en términos de la complejidad de los objetos y procesos implicados en las estructuras argumentativas y su grado de generalización.

2. Fundamentación teórica

2.1. Elementos del Enfoque ontosemiótico

El EOS entiende las matemáticas como una actividad de las personas implicadas en la solución de cierta clase de situaciones e interpreta el significado pragmático de los objetos matemáticos en términos de los sistemas de prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego en la solución de dichas situaciones (Godino, 2024) por una persona (significado personal) o institución (significado institucional).

El aprendizaje tiene como finalidad la apropiación por los estudiantes de los significados institucionales que le permitan afrontar la solución de determinados problemas y desarrollarse como persona. Las dificultades y limitaciones de aprendizaje se interpretan en el EOS como disparidades o desajustes entre el significado manifestado por un sujeto y el significado institucional de referencia.

En toda práctica matemática, entendida como actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos, intervienen diferentes tipos de *objetos matemáticos* primarios que se clasifican según su función y naturaleza en: lenguajes (términos, expresiones, gráficos) en sus diversos registros; situaciones-problema (aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas, ejercicios); conceptos (introducidos mediante definiciones); proposiciones (enunciados sobre conceptos); procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo) y argumentos (enunciados necesarios para justificar las proposiciones y validar los procedimientos). Los objetos primarios pueden ser considerados desde cinco dimensiones duales, lo que lleva a la siguiente tipología de objetos secundarios: ostensivos (públicos) - no ostensivos (ideales); extensivos (particulares) - intensivos (generales); significantes (expresión) - significados (contenido) (antecedentes o consecuentes de una función semiótica); unitarios (considerados como un todo previamente conocido) - sistémicos (sistemas formados por distintos componentes); personales (sujetos individuales) - institucionales (compartidos en una institución).

Además de por su “estructura” (los objetos), la actividad matemática queda caracterizada por su “funcionamiento” (cómo interactúan los objetos), lo que lleva a hablar de *procesos matemáticos* concediéndole una perspectiva dinámica. Tanto los objetos primarios como secundarios se pueden considerar desde la perspectiva proceso-producto, lo que permite distinguir tipos de procesos matemáticos primarios (aquellos de los que emergen los objetos primarios) y secundarios (de los que emergen los objetos secundarios). En consecuencia, se tienen procesos primarios de comunicación, problematización, definición, enunciación, algoritmización y argumentación, y procesos secundarios de materialización-idealización, particularización-generalización, significación-representación, descomposición-unitarización y personalización-institucionalización.

Desde el EOS se entiende el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) como el sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (Burgos et al., 2024). En particular, nos interesa la generalización como proceso distintivo del razonamiento algebraico y aspecto esencial de la demostración. Este proceso se considera en términos de la identificación de objetos intensivos o generales, entendiendo que la generalización tiene rasgos algebraicos si hay una deducción de una expresión que permita calcular el valor de cualquier término en una secuencia, y la abducción, es decir, el reconocimiento de la característica común como algo plausible, debe ser utilizada de manera analítica para deducir una fórmula que necesariamente proporcione el valor de cualquier término (Vergel et al., 2022). Así, Burgos et al. (2024) distinguen tres estratos de generalización:

- *Pre-algebraica*, cuando no hay deducción ni tratamiento analítico, la abducción genera un procedimiento, pero no una expresión directa de la generalidad. Se consideran dos sub-estratos: generalización aritmética, cuando la relación detectada se aplica de manera únicamente local, es decir, solo a unos casos sin llegar a extenderse a otros supuestos; formas avanzadas de generalización aritmética, cuando se observa una mirada estructural de las relaciones permite utilizar la característica común para determinar cualquier término de la secuencia, aunque no se logra expresar explícitamente esa generalidad (Vergel et al., 2022).
- *Proto-algebraica*, cuando lo que se deduce, lo común, se expresa a través de instancias particulares de la variable y se observan rasgos analíticos incipientes (proto-analiticidad). Engloba la generalización factual, contextual (Vergel et al., 2022) y simbólico-contextual en la que se deduce una fórmula general que si bien se expresa en lenguaje alfanumérico conserva una dimensión espaciotemporal.
- *Algebraica*, cuando la regla general, el intensivo, se reconoce como una nueva entidad unitaria, que se materializa de manera simbólica, para convertirse en un nuevo objeto sobre el que se pueden realizar acciones.

Reconocer diferentes grados de generalización en las prácticas matemáticas que implican demostración permite reconocer su complejidad estructural y funcional como factor explicativo de potenciales dificultades.

2.2. Argumentación, justificación, demostración

Consideramos la *argumentación* como el proceso que lleva a formular afirmaciones matemáticas y proporcionar evidencia para apoyarlas. Engloba acciones como inducir, proponer analogías, abducir propiedades de hechos empíricos para la formulación de conjeturas, entre otros (Molina y Samper, 2019). La *justificación* es como la "segunda mitad" de la argumentación, "una invitación a explicitar el pensamiento para respaldar una postura (ya sea un resultado, una idea o una elección)" (Staples y Conner, 2022, p. 5). Entendemos la *demostración* como un tipo de argumentación (Molina y Pino-Fan, 2018) que implica acciones en la búsqueda de una conclusión a favor o en contra de una afirmación matemática. El argumento que surge tiene las siguientes características (Stylianides et al., 2017):

- Utiliza un conjunto de aserciones aceptadas como verdaderas y que están disponibles para la comunidad de aula sin más justificación (axiomas, propiedades, teoremas).
- Se usan modos de argumentación válidos y conocidos por la comunidad o que están dentro de su alcance conceptual. Por ejemplo, reglas de inferencia lógico-deductivas, enumeración sistemática de todos los casos a los cuales se reduce una afirmación, construcción de contraejemplos, desarrollo de razonamientos que muestran que se puede llegar a una contradicción, entre otros.
- Se comunica con formas de expresión apropiadas, conocidas o dentro del alcance conceptual de la comunidad de aula.

Así, la argumentación involucra una actividad matemática más amplia que incluye actividades precursoras de la demostración que no necesariamente cumplen con la integridad matemática, por ejemplo, las argumentaciones inductivas, abductivas o analógicas.

2.3. Modelo de Toulmin

Toulmin (2003) desarrolló un modelo que permite caracterizar argumentos empleados en cualquier proceso de argumentación. El *argumento* (visto en el EOS como objeto sistémico emergente de un proceso de argumentación) se compone de tres elementos básicos: *conclusión* (se manifiesta una afirmación u opinión cuyo valor se está tratando de establecer), *datos* (permiten apoyar la afirmación realizada, la conclusión) y *garantía* (posibilita que el paso de los datos a la conclusión sea legítimo, mediante una justificación a partir de inferencias basadas en reglas, principios, etc.). También Toulmin considera tres elementos auxiliares que permiten describir un argumento: *respaldo* (otras certezas que soportan la garantía), *calificativo modal* (grado de fuerza conferido por la garantía que acompaña a la conclusión) y *refutaciones* (condiciones de excepción en las que la garantía se podría anular). Sin embargo, en la investigación se considera suficiente la versión reducida (datos, conclusión, garantía, respaldo) para describir las argumentaciones abductivas, inductivas, deductivas, deductivas por contraejemplo y analógicas (Arce y Conejo, 2019; Soler-Álvarez y Manrique, 2014).

Los investigadores que se han preocupado por caracterizar la *argumentación abductiva* reconocen que la abducción tiene dos funciones y que, dependiendo de esta, la estructura de la argumentación varía (Papadaki et al., 2019). Cuando su función es exploratoria, a partir de la observación y organización de casos particulares (datos) se deriva una conjetura que actúa como conclusión. La garantía está compuesta por patrones, regularidades o propiedades que se identifican en los datos (Soler-Álvarez y Manrique, 2014). El flujo de la argumentación es directo, desde los datos que se observaron hasta los posibles resultados (Papadaki et al., 2019). Si la función de la abducción es explicativa, a partir de una conclusión deseada, se propone una posible explicación que la justifique a partir de posibles datos, garantía y respaldo (Arce y Conejo, 2019). En este caso, el flujo de la argumentación retrocede hacia la posible explicación de la conclusión (Papadaki et al., 2019).

En el argumento que surge en una *argumentación inductiva*, los datos corresponden a la regla general, la garantía está respaldada por la verificación de dicha regla mediante casos concretos, de la que se deriva su aceptación provisional como verdadera, aunque es insuficiente para inferir la validez de la conclusión (Soler-Álvarez y Manrique, 2014).

En cuanto a las *argumentaciones analógicas*, consideramos aquellas en las que intervienen dos argumentos que cumplen el papel de fuente y término (Marraud, 2014). Estos dos argumentos se sostienen o sucumben conjuntamente porque comparten una garantía similar, es decir, si se acepta la garantía de uno de los argumentos entonces se debería aceptar también en el otro (Gascón, 2020). El respaldo del argumento hace referencia a que los campos argumentativos son análogos, aunque lo único que muestra es que, si la garantía del argumento fuente autoriza el paso de los datos a la conclusión (en el argumento fuente), entonces la garantía del argumento término autoriza el paso de los datos a la conclusión (en el argumento término) (Marraud, 2014).

En una *argumentación deductiva* se aplica una proposición general conocida (garantía) a unos datos dados para obtener la conclusión (Molina et al., 2019). La garantía está respaldada por una teoría matemática que hace que la misma sea válida (Arce y Conejo, 2019). El uso de *contraejemplos* se considera un tipo de argumentación deductiva (Inglis et al., 2007).

Knipping y Reid (2019) consideran que el modelo de Toulmin es útil para reconstruir argumentos en un nivel local, pero que en los procesos de demostración con estructuras complejas es necesario conectar entre sí los argumentos locales, exhibiendo la estructura global. Así, entre el argumento global y los argumentos locales, consideran que es posible identificar un nivel intermedio (flujo de la argumentación) definido por las conexiones entre los argumentos locales que permiten alcanzar la conclusión objetivo. En estas conexiones, se reconoce la posibilidad de que existan múltiples datos y conclusiones, así como que una misma declaración pueda desempeñar roles distintos (dato, conclusión, garantía) en diferentes pasos de la argumentación.

3. Metodología

En este trabajo, realizado bajo un paradigma descriptivo, se adopta una metodología esencialmente cualitativa de tipo exploratorio, con la intención de describir e interpretar las competencias y dificultades de estudiantes con la demostración. Se emplea el análisis de contenido (Cohen et al., 2018) de los informes de los estudiantes, apoyado en el modelo de Toulmin y las categorías de análisis del EOS. El análisis descriptivo de las soluciones de los participantes realizado por las investigadoras consistió en:

- Categorización de los tipos de argumentaciones según los elementos del modelo de Toulmin.
- Identificación de los objetos y procesos implicados en las argumentaciones, relacionándolos con los elementos del modelo de Toulmin.
- Estudio del grado de generalización logrado en las prácticas argumentativas de los estudiantes.

De igual forma, las investigadoras consensuaron el grado de pertinencia, que después aplicarían para valorar la adecuación de las soluciones de los estudiantes. Para esto, tuvieron en cuenta las características que debían cumplir atendiendo a la definición de demostración adoptada (Stylianides et al., 2017), así como la insuficiencia de las argumentaciones inductivas, abductivas o analógicas para demostrar una propiedad matemática (Arce y Conejo, 2019; Soler-Álvarez y Manrique, 2014).

3.1. Contexto y participantes

Este trabajo forma parte de una investigación más amplia en la que analizamos el avance de la competencia para demostrar de un grupo de estudiantes universitarios argentinos de los grados de física y matemáticas durante el desarrollo de la asignatura Matemática Discreta (año 2023), que ambos comparten y tiene como objetivo curricular específico la demostración. Llevamos a cabo la implementación en diferentes momentos: al inicio de la asignatura (cuando los estudiantes no habían recibido formación), en la mitad de la formación y al finalizar la asignatura. En este trabajo nos centramos en uno de los problemas propuestos hacia la mitad del curso, que fue resuelto por 27 estudiantes. En este momento, los estudiantes habían recibido formación teórico-práctica, que siguió un material preparado por la docente responsable. Se habían abordado aspectos esenciales de la lógica proposicional (la noción de proposición, el uso de cuantificadores y de símbolos lógicos, la noción de equivalencia lógica), así como la estructura de monoide de los naturales. Se propusieron continuamente problemas que perseguían conjeturar y demostrar proposiciones de manera específica en este conjunto.

3.2. Instrumento de recogida de datos

En este trabajo mostramos los resultados obtenidos a partir de la resolución a uno de los problemas propuestos (Figura 1), acordado previamente con la docente. Los participantes fueron informados de la finalidad de la investigación y dieron su consentimiento.

Figura 1. *Situación propuesta*

En cada caso justifica tu respuesta.

a) El resultado de la suma de un múltiplo de 3 y un múltiplo de 6:
a.1) ¿Es múltiplo de 3?
a.2) ¿Es múltiplo de 6?

b) El resultado de la suma de un múltiplo de 11 y un múltiplo de 22:
b.1) ¿Es múltiplo de 11?
b.2) ¿Es múltiplo de 22?

c) ¿Cuándo es cierto que, el resultado de la suma de un múltiplo de un número entero n más un múltiplo del doble de n, es múltiplo del doble de n?

Con esta tarea, seguimos la recomendación de autores como Ellis et al. (2022), para quienes el trabajo previo con ejemplos y contraejemplos mejora la competencia en el desarrollo de demostraciones. Así, el tercer ítem invita a los estudiantes a revisar el trabajo argumentativo desarrollado en los primeros apartados para facilitar la formulación de una conjetura y su demostración.

3.3. Grado de pertinencia de las respuestas

Se establecen los siguientes grados de pertinencia de las respuestas de los estudiantes:

- Correcta (C). Si establece y garantiza la validez de las proposiciones implicadas en los ítems a.1) y a.2) (Figura 2) o la falsedad de estas en los ítems a.2) y b.2) (Figura 6). En el ítem c), una respuesta se considera correcta si establece una conjetura cierta y garantiza su validez general (Figura 11).
- Parcialmente correcta (PC). Si establece la validez de las proposiciones implicadas en los ítems a.1) y a.2), o la falsedad de estas en los ítems a.2) y b.2), pero la argumentación dada no permite valorar plenamente su (in)validez general (Figura 5). En el ítem c), una respuesta es parcialmente correcta si establece una conjetura correcta, pero la argumentación dada es

parcial o presenta deficiencias, por ejemplo, en la aplicación de propiedades (Figura 10).

– Incorrecta (I). En otro caso (Figuras 4, 8).

4. Resultados

En la Tabla 1 describimos el grado de pertinencia de las respuestas a cada inciso de los ítems a) y b), según los tipos de estrategias argumentativas. Destaca que, de los 27 estudiantes, nueve no respondieron o no argumentaron la segunda parte del ítem a), uno no resolvió la primera pregunta del ítem b) y seis no respondieron o no argumentaron la segunda.

En los ítems a.1) y b.1), los estudiantes mayormente propusieron argumentaciones deductivas correctas para demostrar que "la suma de un múltiplo de 3 y un múltiplo de 6 es múltiplo de 3" y "la suma de un múltiplo de 11 y un múltiplo de 22 es múltiplo de 11", respectivamente (Figuras 2, 3). En menor medida, plantearon argumentaciones incorrectas de tipo inductivo, donde corroboraron las proposiciones en casos particulares para asegurar su validez general (Figura 4), y argumentaciones deductivas parcialmente correctas en las que consideraron un múltiplo de 3 como $3k$ y un múltiplo de 6 como $6k$, es decir, solo tuvieron en cuenta casos en los que el k es el mismo (Figura 5).

Tabla 1. *Grado de pertinencia según los tipos de estrategias en a) y b)*

Estrategia argumentativa	Grado de pertinencia										Total
	Ítem a.1			Ítem a.2		Ítem b.1			Ítem b.2		
	I	PC	C	I	C	I	PC	C	I	C	
Deductiva	2	3	16	6	0	0	1	16	3	1	48
Inductiva	5	0	0	4	0	8	0	0	4	0	21
Deductiva por contraejemplo	1	0	0	0	8	1	0	0	1	10	21
Analógica	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2
Total	8	3	16	10	8	9	1	16	10	11	92

En los ítems a.2) y b.2), cuando los estudiantes respondieron correctamente proporcionaron contraejemplos adecuados para refutar la proposición (Figura 6). En el ítem a.2), la mayoría respondió incorrectamente, empleando argumentaciones deductivas para asegurar que la suma de un múltiplo de 3 más un múltiplo de 6 no es múltiplo de 6 (en ningún caso) (Figura 7) y argumentaciones inductivas. En el ítem b.2), las argumentaciones incorrectas fueron en su mayoría inductivas (Figura 4) y deductivas.

La formación recibida hasta el momento puede haber priorizado el uso de argumentaciones deductivas en ítems como a) y b) (donde la conjetura está explícita en el enunciado), y por tanto, ser la principal razón del predominio de este tipo de argumentación. Creemos que si bien las argumentaciones deductivas son esenciales en la elaboración de demostraciones, no se debe desatender el uso de las argumentaciones inductivas, abductivas o analógicas en la formulación de conjeturas. De hecho, la ausencia de un trabajo previo con estos tipos de argumentaciones puede incidir en la propuesta de demostraciones incorrectas (Figura 7).

Los estudiantes emplearon usualmente el mismo tipo de argumentación tanto en a.1) y b.1) (observado en 48 prácticas de las 53 analizadas) como en a.2) y b.2) (en 29 prácticas de 39). En la Tabla 2 sintetizamos el grado de pertinencia según el tipo de generalización logrado en los ítems a) y b). En las respuestas correctas y parcialmente correctas de a.1) y b.1), los estudiantes lograron esencialmente una generalización algebraica en las argumentaciones deductivas propuestas (Figuras 2, 5). En las respuestas incorrectas, fundamentalmente alcanzaron una generalización aritmética en las argumentaciones inductivas (Figura 4).

Tabla 2. *Grado de pertinencia según el tipo de generalización en a) y b)*

Tipo de generalización	Grado de pertinencia										Total
	Ítem a.1			Ítem a.2		Ítem b.1			Ítem b.2		
	I	PC	C	I	C	I	PC	C	I	C	
Aritmética	6	0	0	4	2	9	0	0	5	4	30
Aritmética sofisticada	0	0	0	0	6	0	0	0	0	6	12
Contextual	0	0	3	1	0	0	0	4	0	0	8
Simbólica-Contextual	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
Algebraica	2	3	13	5	0	0	1	12	4	0	40
Total	8	3	16	10	8	9	1	16	10	11	92

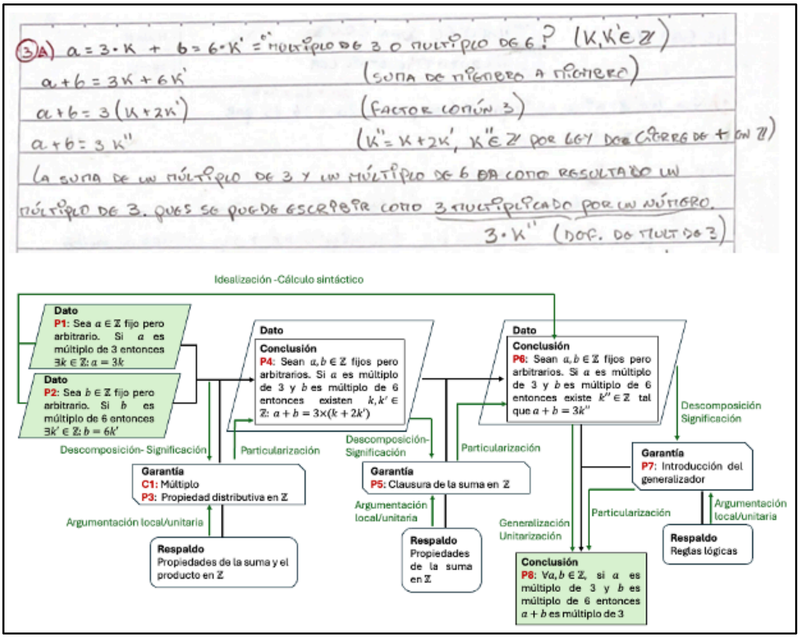
En los ítems a.2) y b.2), los estudiantes principalmente lograron una generalización aritmética sofisticada en las argumentaciones deductivas por contraejemplo correctas (Figura 6), mientras que, en las incorrectas, alcanzaron mayormente una generalización algebraica en las argumentaciones deductivas, y aritmética en las inductivas (Figura 4).

A continuación, presentamos ejemplos prototípicos de las estrategias seguidas para validar o refutar las proposiciones, identificando el tipo de generalización logrado. En algunos casos, mostramos el análisis ontosemiótico realizado sobre las estructuras argumentativas.

En los ítems a.1) y b.1), en la mayoría de las argumentaciones deductivas correctas que propusieron los estudiantes para demostrar, partieron como datos (por ejemplo, en a.1) de las expresiones de un múltiplo de 3 como $3k$ y un múltiplo de 6 como $6k'$ ($k, k' \in \mathbb{Z}$), ambos fijos pero arbitrarios, tal como E2 (ver proposiciones P1, P2 en Figura 2). Tomando como garantía el concepto de múltiplo (C1) y la propiedad distributiva en $\mathbb{Z}$ (P3), E2 derivó como conclusión (primero P4 y después P6) la expresión como múltiplo de 3 de la suma entre un múltiplo de 3 y un múltiplo de 6 (fijos arbitrarios). La regla lógica de introducción del generalizador para pasar de la proposición P6 (ahora dato) a la proposición P8 (conclusión), permite derivar la validez de la proposición para cualesquiera múltiplos de 3 y 6.

Como muestra la Figura 2, se articulan procesos de idealización y cálculo sintáctico con procesos de descomposición y significación de los datos para reconocer los conceptos y propiedades que servirán de soporte en la conclusión particular derivada de estas. Además, los respaldos actúan como argumentos locales de las diferentes garantías. Es interesante destacar que, al inicio de la solución de E2, el estudiante expresa *"$a = 3k + b = 6k'$ ¿múltiplo de 3 o múltiplo de 6?"*, es decir, solo contempla la posibilidad de que la suma sea múltiplo de uno de los dos enteros. Creemos que esta puede ser una razón por la cual tanto E2 como los estudiantes que no respondieron a los ítems a.2) o b.2), solo han demostrado que la proposición se cumple para el entero 3 (u 11).

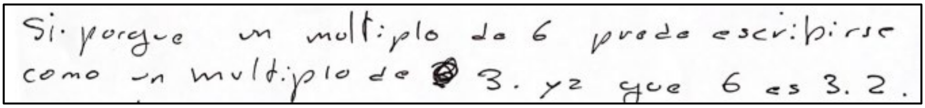
Figura 2. *Respuesta y análisis ontosemiótico de la estructura argumentativa de E2, ítem a.1). Generalización algebraica*



Cuando los estudiantes procedieron como E2 para a.1) y b.1) (25 soluciones), utilizaron símbolos literales (en su rol de parámetros) para referirse a un múltiplo de 3 y a un múltiplo de 6. Aunque los ostensivos son utilizados como elementos genéricos, se actúa sobre objetos particulares, de los que se entiende que solo interesan sus características generales (Font et al., 2007). Además, los estudiantes razonaron analíticamente para obtener la regla general (intensivo) y la reconocieron como nueva entidad unitaria emergente del sistema de prácticas, que materializada de manera simbólica se convierte en un nuevo objeto sobre el que es posible realizar acciones (Burgos et al., 2024), en particular, obtener expresiones canónicas. Por tanto, la generalización lograda en estas prácticas fue algebraica.

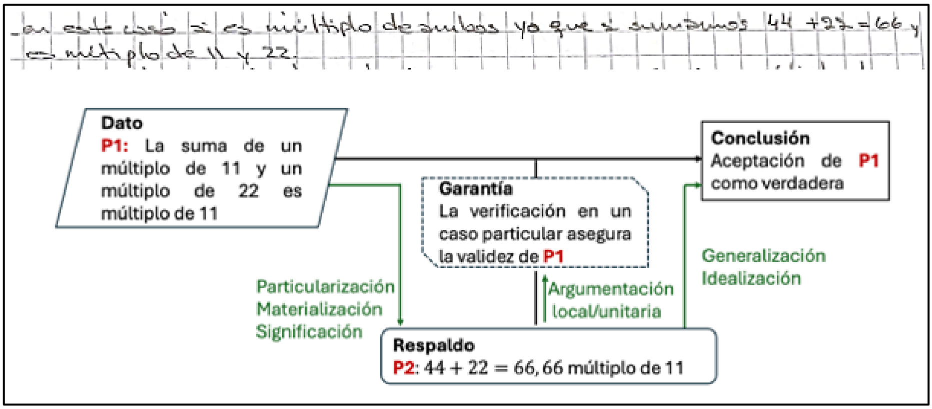
Los siete estudiantes restantes que desarrollaron argumentaciones deductivas correctas para a.1) y b.1) procedieron como E3 en a.1) (Figura 3). E3 partió como dato de la propiedad "todo múltiplo de 6 es también múltiplo de 3". Se apoyó en que la suma de dos múltiplos de 3 es múltiplo de 3 (garantía implícita), para concluir la validez de la proposición particular implicada (conclusión deseada). En estos casos, a pesar de que no se emplea lenguaje simbólico, se identifica y nombra la generalidad mediante términos genéricos y locativos, que hacen referencia a objetos abstractos, por tanto, la generalización lograda en estas prácticas es proto-algebraica contextual (Burgos et al., 2024).

Figura 3. *Argumentación deductiva correcta de E3, ítem a.1). Generalización contextual*


Si· porque un multiplo de 6 puede escribirse como un multiplo de 3. ya que 6 es 3. 2.

En las argumentaciones incorrectas desarrolladas para estos ítems, los estudiantes emplearon usualmente uno o varios casos particulares para corroborar las proposiciones implicadas, sin reconocer que su valor de verdad sigue siendo incierto (Buchbinder y Zaslavsky, 2019). En general, usaron esta argumentación (inductiva) para verificar las dos proposiciones involucradas tanto en el ítem a) como en el b). Como se observa en la Figura 4, la verificación de que la proposición P1 se cumplía en un caso particular (respaldo P2) (particularización, materialización, significación) llevó al estudiante a aceptarla como verdadera (conclusión) (generalización, idealización).

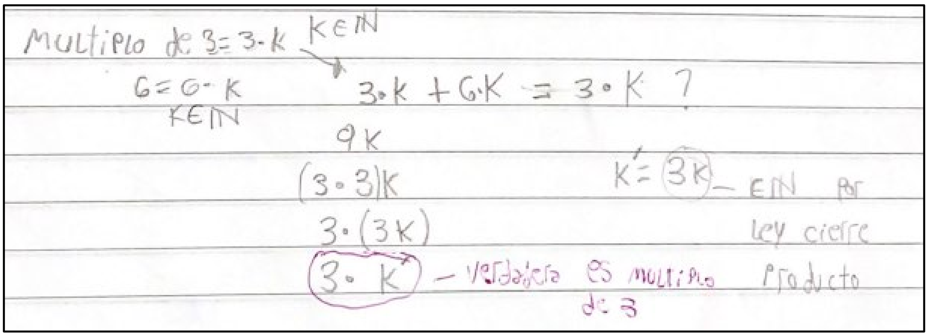
Figura 4. *Respuesta y análisis ontosemiótico de la estructura argumentativa de E14, ítem b.1). Generalización aritmética*



En estas soluciones, donde el uso de ejemplos es la única fuente de convicción para los estudiantes (Aricha-Metzer y Zaslavsky, 2019), el grado de generalización es pre-algebraico aritmético, pues el uso de los ejemplos no lleva a detectar regularidades, solo ratificar empíricamente conjeturas. Por ejemplo, E14 particulariza la relación "en este caso [suma de un múltiplo de 11 más un múltiplo de 22] si es múltiplo de ambos", sin evidenciar razonamiento analítico (Burgos et al., 2024). Se observa también este uso pre-algebraico de contraejemplos incorrectos, en algunas respuestas incorrectas para a.1) y b.1).

Por último, en las respuestas parcialmente correctas elaboradas en a.1) y b.1), los participantes demostraron la proposición para un caso específico, cuando el entero (o natural) k que multiplica al 3 y al 6 es el mismo (Figura 5).

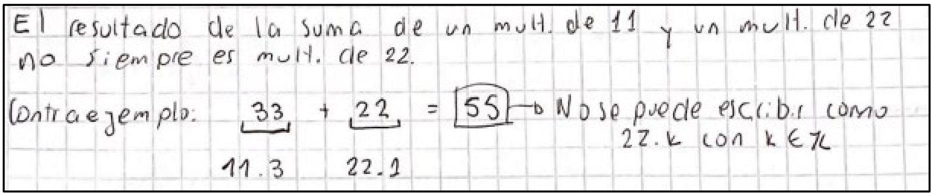
Figura 5. *Argumentación deductiva parcialmente correcta de E12, ítem a.1). Generalización algebraica*



En los ítems a.2) y b.2), la mayoría de las respuestas correctas usaron y justificaron apropiadamente contraejemplos para refutar las proposiciones implicadas (Lew y Zazkis, 2019). Como podemos observar en la Figura 6, E4 partió de la suma entre 33 (significándolo como múltiplo de 11, $33 = 11 \times 3$) y 22 (como múltiplo de 22: $22 = 22 \times 1$), manifestando que el resultado 55 "no se puede escribir como $22k, con\ k \in \mathbb{Z}$" (dato). Así, empleando como respaldo que "para cualesquiera enteros a y b, con a múltiplo de 11 y b múltiplo de 22, $a + b$ es múltiplo de 22 si y solo si no existen a' y b' enteros, también múltiplos de 11 y 22 respectivamente, tales que $a' + b'$ no es múltiplo de 22" (generalización, idealización), derivó la conclusión deseada.

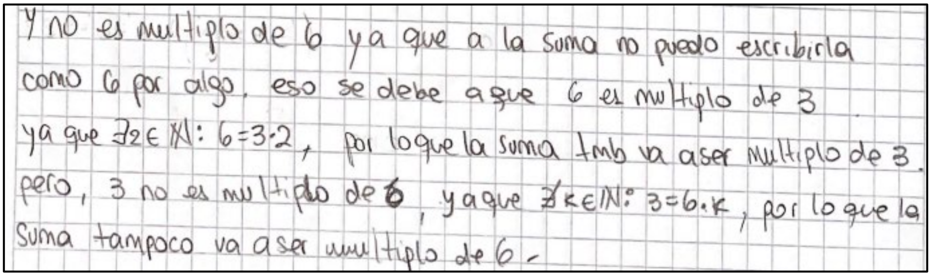
En estos casos, los estudiantes desarrollaron una mirada estructural de las relaciones implicadas que los llevó a seleccionar los ejemplos de manera específica, como representativos de su clase, para mostrar la invalidez de la conjetura. Se produce así una generalización aritmética sofisticada en sus prácticas (Burgos et al., 2024).

Figura 6. *Argumentación deductiva por contraejemplo correcta de E4, ítem b.2). Generalización aritmética sofisticada*



Cuando los estudiantes respondieron incorrectamente a.2) y b.2), emplearon principalmente argumentaciones inductivas y deductivas. En las primeras, tomaron casos particulares que no les sirvieron de contraejemplos, aceptando la validez de las proposiciones. En las segundas, procedieron de forma similar a E9 (Figura 7) asegurando que la suma de un múltiplo de 3 y un múltiplo de 6 no es múltiplo de 6, porque para serlo ambos deberían ser múltiplos de 6. E9 desarrolla una generalización proto-algebraica contextual: obtiene una regla general expresada en términos genéricos pero vinculada al contexto.

Figura 7. *Argumentación deductiva incorrecta de E9, ítem a.2). Generalización contextual*


Y no es multiplo de 6 ya que a la suma no puedo escribirla
como 6 por algo, eso se debe a que 6 es multiplo de 3
ya que $\exists 2 \in \mathbb{N}: 6=3\cdot 2$, por lo que la suma tmb va aser multiplo de 3.
pero, 3 no es multiplo de 6, ya que $\nexists k \in \mathbb{N}: 3=6\cdot k$, por lo que la
suma tampoco va aser multiplo de 6.

De los 20 estudiantes que respondieron al ítem c), 15 enunciaron conjeturas incorrectas, principalmente por asignar un valor particular al natural "será cierto cuando $n = 0$" (E5) o un conjunto de valores "será verdadero si n es par" (E12). Solo dos fueron parcialmente correctas, por considerar solo algún caso donde la conjetura es válida, por ejemplo, para $k = 2$ en la expresión $nk + 2nk'$ (E8), y las otras tres correctas. En contra de lo esperado (Ellis et al., 2022) cuando los estudiantes enunciaron conjeturas, en general, no partieron de los resultados de los apartados previos.

En la Tabla 3 incluimos los tipos de estrategias empleadas por los estudiantes en este apartado, con relación al grado de pertinencia logrado. Nótese que, de los 20 estudiantes, nueve enunciaron la conjetura sin explicitar cómo la obtuvieron y sin demostrarla.

Tabla 3. *Grado de pertinencia según los tipos de estrategias para conjeturar y para demostrar en c)*

Estrategia de conjetura	Estrategia de demostración	Grado de pertinencia			Total
		I	PC	C	
No explicita	Deductiva	3	2	1	6
	Abductiva explicativa	1	0	0	1
Abductiva exploratoria	Deductiva	0	1	0	1
	Inductiva	1	0	0	1
	Sin demostración	2	0	0	2
Total		7	3	1	11

Solo un estudiante propuso una conjetura adecuada (sin explicitar cómo la derivó) y una argumentación deductiva apropiada para garantizar su validez (Figura 11). De los tres estudiantes cuyas argumentaciones categorizamos como parcialmente correctas, dos plantearon conjeturas adecuadas (uno mediante una abducción exploratoria y otro sin explicitar cómo llegó a ella) y desarrollaron argumentaciones deductivas con ciertas dificultades en el uso de propiedades (Figura 10). El resto de los participantes enunciaron la conjetura, proponiendo una argumentación deductiva inapropiada (Figura 8) o abductiva explicativa, o expresaron la conjetura empleando la abducción exploratoria, sin demostrarla después (Figura 9).

En la Tabla 4 relacionamos el grado de pertinencia según la generalización alcanzada en este ítem. En las respuestas correctas y parcialmente correctas, los estudiantes lograron una generalización algebraica, asociada al uso de argumentaciones deductivas para demostrar las conjeturas emergentes (Figuras 10, 11). En las respuestas incorrectas, la generalización fue fundamentalmente proto-algebraica simbólica-contextual, generalmente vinculada a conjeturas sin demostración (Figura 9), si bien también se observaron generalizaciones algebraicas en las argumentaciones deductivas (Figura 8).

Tabla 4. *Grado de pertinencia según el tipo de generalización en c)*

Tipo de generalización	Grado de pertinencia			Total
	I	PC	C	
Contextual	3	0	0	3
Simbólica-Contextual	10	0	0	10
Algebraica	3	3	1	7
Total	16	3	1	20

Como muestra la Figura 8, E26 enuncia la conjetura incorrecta "$nk + 2nk' = 2nk''$. Esto solo se cumple si $nk = 0$". Vuelve a ponerse de manifiesto un uso inapropiado de los números generalizados ($k = k' = k''$), pero también una falta de conocimiento de la implicación lógica del "solo si".

Los estudiantes que, como E26 usaron argumentación deductiva, establecieron una regla general en lenguaje simbólico para convertirse en un nuevo objeto sobre el que se puede actuar de forma analítica, por lo que, la generalización lograda fue algebraica.

En la Figura 9 mostramos la solución de E24 a los tres ítems. Para derivar la regla general en c) "será cierto cuando el k por el que se multiplica sea par, o sea $2t$, con $t \in \mathbb{Z}$" (conclusión, conjetura correcta), E24 emplea una abducción exploratoria implícita. En ésta, parte de la suma entre un múltiplo de 3 y un múltiplo de 6 y la suma de un múltiplo de 11 y un múltiplo de 22 (datos) y reconoce que ambas serán múltiplo de 6 y 22, si el múltiplo de 3 o de 11, respectivamente, está multiplicado por un número par (garantías). Sin embargo, E24 no demuestra la conjetura emergente. Así, la generalización lograda es simbólica-contextual, porque deduce una regla general en lenguaje simbólico que conserva una dimensión contextual, sin emplear razonamiento analítico.

Figura 8. *Conjetura incorrecta y argumentación deductiva incorrecta de E26, ítem c). Generalización algebraica*

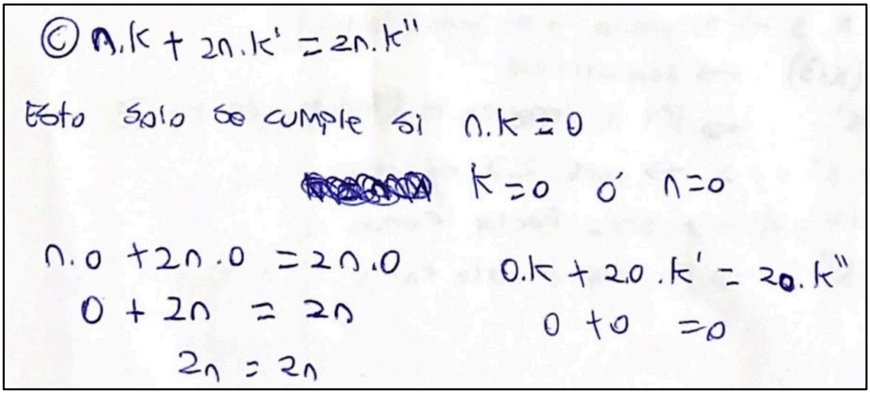
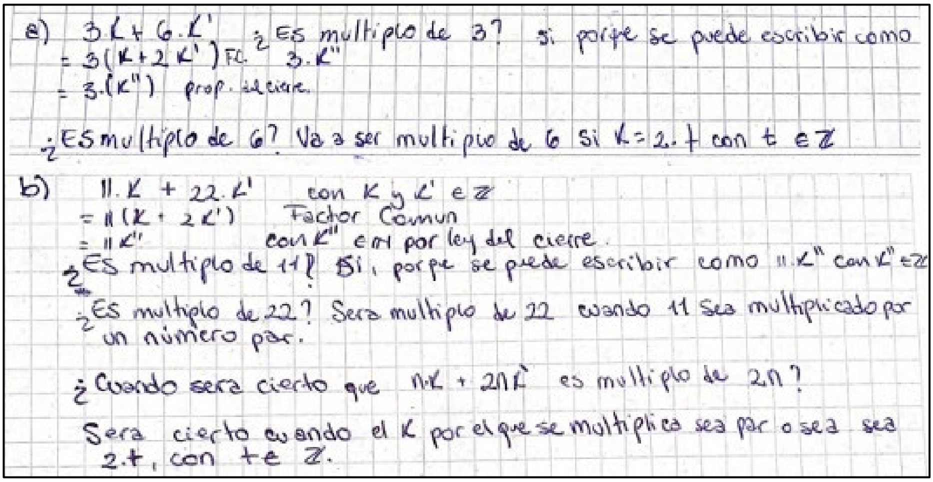


Figura 9. *Conjetura correcta sin demostración de E24, ítem c). Generalización simbólica-contextual*



En dos de las tres respuestas categorizadas como parcialmente correctas, los estudiantes plantearon argumentaciones deductivas para demostrar conjeturas parcialmente correctas, sin explicitar cómo las obtuvieron, por ejemplo "sea $a = nk$ y $a' = 2nk'$. Si $k = 2, a + a'$ es múltiplo de a', pero habría que ver si con otras condiciones pasa lo mismo" (E8). E8 emplea un calificativo que muestra su falta de confianza en la conjetura expuesta (Inglis et al., 2007), reconociendo que podría haber otros "k" que la cumplan. El tercer estudiante recurrió a una abducción exploratoria para formular una conjetura correcta, y desarrolló una argumentación deductiva para demostrarla, con ciertas dificultades. En la Figura 10 presentamos su solución y caracterizamos su argumentación (abductiva exploratoria/deductiva) mediante el análisis ontosemiótico sobre la estructura argumentativa.

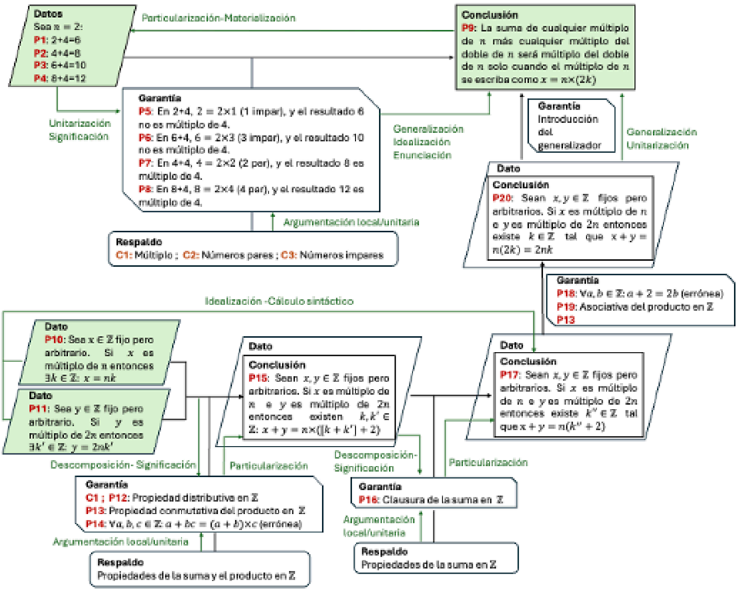
Figura 10. *Respuesta y análisis ontosemiótico de la estructura argumentativa de E1, ítem c). Generalización algebraica*

2	4	
1) $2 \times 1 = 2$	5) $4 \times 1 = 4$	1) + 5) $\rightarrow 2 + 4 = 6 \rightarrow 6 \neq 4k$
2) $2 \times 2 = 4$	6) $4 \times 2 = 8$	2) + 5) $\rightarrow 4 + 4 = 8 \rightarrow 8 = 4 \times 2$
3) $2 \times 3 = 6$	7) $4 \times 3 = 12$	3) + 5) $\rightarrow 6 + 4 = 10 \rightarrow 10 \neq 4k$
4) $2 \times 4 = 8$	8) $4 \times 4 = 16$	4) + 5) $\rightarrow 8 + 4 = 12 \rightarrow 12 = 4 \times 3$

Y si se prueba con los demás (que lo hice mentalmente) llegaremos a un patrón donde la suma de un múltiplo de n más un múltiplo de $2n$, será múltiplo de $2n$ solo cuando el múltiplo de n se escriba como $x = n(2k)$, es decir, que n esté multiplicado por un número par. Ahora debemos hacer la prueba suponiendo n arbitrario pero fijo, donde $(x = nk) + (y = 2nk) = 2nk$:

$x + y = 2nk$
$\rightarrow (nk) + (2nk') = 2nk$ (reescribo)
$\rightarrow n(k + 2k') = 2nk$ (factor común n)
$\rightarrow n(k + k'2) = 2nk$ (conmutativa)
$\rightarrow n[(k + k') + 2] = 2nk$ (asociativa)
$\rightarrow n(k'' + 2) = 2nk$

Llegué a lo que había dicho antes de que para que se cumpla x debe verse como $n(2k)$ para llegar a que la suma es igual a $2nk$

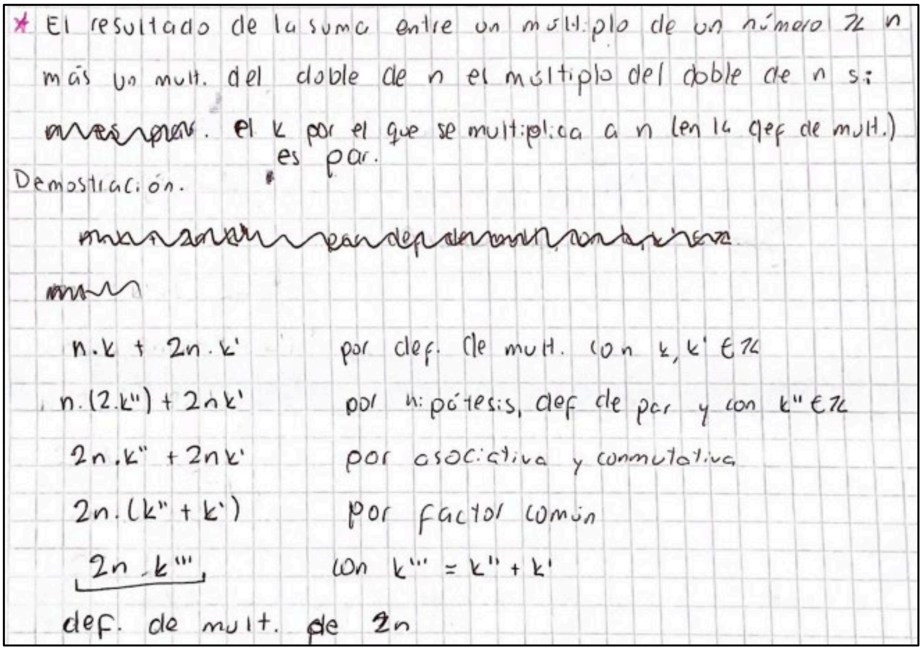


En primer lugar, E1 partió de un caso concreto de n ($n = 2$) y buscó múltiplos de n y $2n$, combinando diferentes relaciones (proposiciones-datos P1, P2, P3, P4). Indicó que "si se prueba con los demás" (algo que "hizo mentalmente") "llegaremos a un patrón", entendido como la generalidad (conclusión P9). Aquí, el calificativo modal empleado por E1 muestra que reconoce que los ejemplos analizados no agotan todas las posibilidades. Las garantías que apoyan la generalización surgen de la unitarización y significación de los datos (proposiciones-garantías P5, P6, P7, P8), respaldadas por los conceptos de múltiplo, números pares e impares (argumentación local). El papel de los ejemplos fue fundamental para la formulación de la conjetura (Ellis et al., 2022).

En las prácticas que siguen, E1 fue consciente de que la argumentación previa no era suficiente para garantizar la validez general de la conjetura ("ahora debemos hacer la prueba") y planteó una argumentación deductiva en la que evidenció dificultades. Partió de dos enteros fijos arbitrarios x, y que representaron un múltiplo de n y de $2n$ respectivamente. Empleó propiedades erróneas (garantías P14, P18) que lo llevaron a derivar conclusiones también incorrectas (P15, P17, P20), que después actuaron como datos inválidos para derivar la conclusión final P9. E1 muestra deficiencias en el conocimiento y uso de propiedades aritméticas y reglas lógicas (Buchbinder y McCrone, 2020).

Por último, solo E4 demostró de manera correcta una conjetura que obtuvo sin explicitar cómo (Figura 11).

Figura 11. *Conjetura correcta y argumentación deductiva correcta de E4, ítem c). Generalización algebraica*


* El resultado de la suma entre un múltiplo de un número $\mathbb{Z}$ n más un mult. del doble de n el múltiplo del doble de n si: el k por el que se multiplica a n (en la def de mult.) es par.

Demostración.

$n.k + 2n.k'$ por def. de mult. con $k, k' \in \mathbb{Z}$

$n.(2.k'') + 2nk'$ por hipótesis, def de par y con $k'' \in \mathbb{Z}$

$2n.k'' + 2nk'$ por asociativa y conmutativa

$2n.(k'' + k')$ por factor común

$2n.k'''$, con $k''' = k'' + k'$

def. de mult. de 2n

Previamente E4 había desarrollado argumentaciones deductivas correctas en los ítems a.1) y b.1), y había propuesto contraejemplos adecuados en a.2) y b.2) (Figura 6). En c), enunció y demostró la conjetura "la suma entre un múltiplo de un número entero n más un múltiplo del doble de n es múltiplo del doble de n si el k por el que se multiplica a n es par", operando analíticamente sobre la regla general para obtener su expresión canónica (generalización algebraica).

Estos resultados muestran mayores dificultades en este ítem, en comparación con los enunciados previos en los que se explicitaba la conjetura a validar o refutar. Se observa, por un lado, un aumento considerable de soluciones sin demostración de las conjeturas emergentes, y por otro, un incremento de soluciones incorrectas, en las que se enunciaron conjeturas inadecuadas y propusieron argumentaciones inapropiadas para demostrarlas.

5. Conclusiones

En este trabajo, analizamos las competencias y limitaciones de estudiantes de primer curso universitario ante un problema que involucra la conjetura y la demostración de propiedades aritméticas. Para ello, empleamos el modelo de Toulmin (2003) de manera articulada con herramientas del EOS (Burgos et al., 2024; Godino, 2024). Mientras que el modelo de Toulmin nos permitió categorizar las prácticas según los elementos que determinan su estructura, las herramientas del EOS nos posibilitaron caracterizarlas en términos de los objetos y procesos involucrados, y del grado de generalización logrado.

Las dificultades identificadas en este trabajo han sido reconocidas por algunos investigadores como factores constituyentes de obstáculos para abordar con éxito las demostraciones pretendidas y con el nivel de generalización esperado en el nivel universitario (Stylianides et al., 2017; Varghese, 2017). Por un lado, el uso de argumentaciones inductivas o abductivas para demostrar, así como la formulación de conjeturas sin demostración, revela dificultades relacionadas con la interpretación de los elementos que son necesarios y suficientes para elaborar una demostración. Estas prácticas también han sido evidenciadas con alta frecuencia por estudiantes ingresantes al nivel universitario o de primer curso (Arce y Conejo, 2019; Larios-Osorio et al., 2021). El análisis del grado de generalización logrado en estas prácticas evidencia que los estudiantes no alcanzan la formalización esperada en este nivel educativo. Por otro lado, se observa una carencia de conocimientos fundamentales del nivel secundario y una falta de competencias en el uso de reglas lógicas o propiedades que derivan en demostraciones inadecuadas (Buchbinder y McCrone, 2020). Además, en estos casos, la generalización lograda fue algebraica, lo que muestra que un mayor grado de sofisticación no necesariamente implica mayor pertinencia en la solución.

En comparación con un estudio previo realizado al inicio de la formación de estos estudiantes (Milanesio y Burgos, 2024), observamos cierta mejora en su competencia para desarrollar demostraciones de proposiciones como las involucradas en los ítems a) o b), ya que en los resultados previos predominaban argumentaciones inductivas o abductivas explicativas. Sin embargo, continúa observándose una alta frecuencia de conjeturas sin demostración en ítems como el c), donde se pretende que los estudiantes revisen y utilicen las argumentaciones previas como conocimientos disponibles.

Este trabajo pone al descubierto que la formación recibida hasta el momento no fue suficiente para lograr un aprendizaje consolidado de la demostración. Con esto queremos resaltar la necesidad de poner el foco de atención en los procesos instruccionales actuales para poder abordar las dificultades identificadas y explotar oportunidades de aprendizaje de calidad en la práctica de la demostración. De cara a futuras investigaciones, consideramos necesario explorar los procesos instruccionales sobre la demostración, incorporando el rol del profesor y de los medios, así como también, ampliar las muestras para comprender la evolución de los estudiantes en la competencia para desarrollar demostraciones. Pensamos que disponer de esta información podría ayudar en el diseño de acciones formativas para mejorar la enseñanza y aprendizaje de la demostración.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arce, M. y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: relaciones con el conocimiento matemático. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en educación matemática XXIII* (pp. 163-172). SEIEM.

Aricha-Metzer, I. y Zaslavsky, O. (2019). The nature of students' productive and non-productive example-use for proving. *Journal of Mathematical Behavior, 53*, 304-322. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.002

Buchbinder, O. y McCrone, S. (2020). Preservice teachers learning to teach proof through classroom implementation: Successes and challenges. *Journal of Mathematical Behavior, 58*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100779

Buchbinder, O. y Zaslavsky, O. (2019). Strengths and inconsistencies in students' understanding of the roles of examples in proving. *Journal of Mathematical Behaviour, 53*, 129-147. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.06.010

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Godino, J. D. (2024). Expanded model for elementary algebraic reasoning levels. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education, 20*(7). https://doi.org/10.29333/ejmste/14753

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Ellis, A., Lockwood, E. y Ozaltun-Celik, A. (2022). Empirical re-conceptualization: From empirical generalizations to insight and understanding. *Journal of Mathematical Behavior, 65*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100928

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. *For the learning of mathematics, 27*(2).

Fredriksdotter, H., Norén N. y Bråting, N. (2022). Investigating grade-6 students' justifications during mathematical problem solving in small group interaction. *Journal of Mathematical Behavior, 67,* 100972. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100972

Gascón, J. (2020). How to argue with coherence. *International Journal for Theory, History and Foundations of Science, 35*(3), 327-344. https://doi.org/10.1387/theoria.20435

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw-Hill, Aula Magna.

Inglis, M., Mejía-Ramos, J. y Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 3-21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

Knipping, C. y Reid, D. (2019). Argumentation analysis for early career researchers. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 3-31). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_1

Larios-Osorio, V., Spíndola-Yáñez, P. I., Cuevas-Salazar, O. y Castro, J. (2021). Conflictos semióticos y niveles de algebrización en aspirantes a Ingeniería. *Educación Matemática, 33*(3), 263-289. https://doi.org/10.24844/em3303.10

Lew, K. y Zazkis, D. (2019). Undergraduate mathematics students' at-home exploration of a prove-or-disprove task. *Journal of Mathematical Behavior, 54*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.09.003

Mariotti, M. y Pedemonte, B. (2019). Intuition and proof in the solution of conjecturing problems. *ZDM, 51*(5), 759-777. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01059-3

Marraud, H. (2014). Argumentos a fortiori. *International Journal for Theory, History and Foundations of Science, 29*(1). 99-112. https://doi.org/10.1387/theoria.6275

Milanesio, B. y Burgos, M. (2024). Significados personales sobre la demostración matemática de estudiantes al inicio de la educación superior. *Educación Matemática*, 36(3), 206-241. https://doi.org/10.24844/EM3603.08

Molina, O., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 93-116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484

Molina, O. y Pino-Fan, L. (2018). Diferencias entre discursos colectivos (verbales) e individuales (escritos) al hacer demostraciones en geometría: una explicación a partir del sistema de normas. *Educación Matemática, 30*(2), 73-105. https://doi.org/10.24844/EM3002.04

Molina, O. y Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema, 33,* 109-134. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a06

Morales-Ramírez, G., Rubio-Goycochea, N. y Larios-Osorio, V. (2021). Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. *Bolema, 35*, 664-689. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a06

Papadaki, C., Reid, D. y Knipping, C. (2019). Abduction in argumentation: Two representations that reveal its different functions. En T. Jankvist, M. Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the eleventh congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 310-317). Utrecht University and ERME.

Reuter, F. (2023). Explorative mathematical argumentation: A theoretical framework for identifying and analysing argumentation processes in early mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 112*, 415-435. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10199-5

Soler-Álvarez, M. y Manrique, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 191-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1026

Staples, M. y Conner, A. (2022). Introduction: Conceptualizing argumentation, justification, and proof in mathematics education. En K. Bieda, A. Conner, K. Kosko y M. Staples (Eds.), *Conceptions and consequences of mathematical argumentation, justification, and proof* (pp. 1-10). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Moutsios, A. (2023). Proof and proving in school and university mathematics education research: A systematic review. *ZDM,* 1-13. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01518-y

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237-266). National Council of Teachers of Mathematics.

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Arguments*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005

Varghese, T. (2017). Proof, proving and mathematics curriculum. *Transformations, 3*(1).

Vergel, R., Radford, L. y Rojas, P. J. (2022). Zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico: Una contribución a la noción de zona de emergencia del pensamiento algebraico. *Bolema, 36*(74), 1174-1192. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a11

Weber, K., Lew, K. y Mejía Ramos, J. (2020). Using expectancy value theory to account for students' mathematical justifications. *Cognition and Instruction, 38*(1), 27-56. https://doi.org/10.1080/07370008.2019.1636796