CONTEXTOS EDUCATIVOS, 35 (2025): 117-138. http://doi.org/10.18172/con.6499

APRENDIENDO EL MODELO PARTE-TODO DE LAS FRACCIONES A PARTIR DE UNA TAREA CON BANDERAS DEL MUNDO

António Guerreiro
Universidade do Algarve, Portugal
aguerrei@ualg.pt

Enrique Martínez-Jiménez
Universidad de Córdoba
enrique.martinez@uco.es

RESUMEN: Este artículo tiene como objetivos presentar una tarea contextualizada para el aprendizaje del modelo parte-todo de las fracciones basada en el uso de banderas de países, y analizar las estrategias de resolución y los niveles de dificultad que surgen de su implementación en diversos contextos educativos. Los resultados obtenidos se analizan desde un enfoque cualitativo fenomenológico, obteniéndose evidencias del nivel de razonamiento sobre las fracciones puesto en práctica. La tarea, originalmente diseñada para educación básica obligatoria, parte de la pregunta *¿Qué fracción de la bandera ocupa el color rojo?* ante una selección de diversas banderas. Con el objetivo de identificar estrategias específicas de cálculo de fracciones, se puso en práctica esta tarea con alumnado de educación básica, profesorado en formación y profesorado en servicio de España y Portugal. Se identificaron seis estrategias de resolución diferentes: visual, de descomposición, de recomposición, operacionales, de medición con regla graduada y de mediciones fraccionarias. Asimismo, se identificaron distintos niveles de dificultad en función de si las banderas requieren para el cálculo de la fracción estrategias gráficas o de conocimiento de propiedades geométricas. La propuesta favorece el desarrollo de competencias en cálculo, medida y estimación de fracciones y es adaptable a distintos cursos, a partir de 3º de educación primaria o básica, modificando la selección de banderas. Se observó en el alumnado y el profesorado en formación el predominio de estrategias visuales, de descomposición y operacionales aditivas. También se observó en el profesorado en formación y en servicio la transformación de la geometría por recomposición y el uso de regla graduada para el cálculo de áreas triangulares. Destaca en los resultados la no aparición de estrategias de mediciones fraccionarias, así como sustractivas, multiplicativas y cocientes en ninguno de los colectivos participantes.

PALABRAS CLAVE: números racionales, educación básica, formación de profesorado, estrategias de resolución de problemas, modelo parte-todo.

LEARNING THE PART-WHOLE MODEL OF FRACTIONS THROUGH A TASK WITH WORLD FLAGS

ABSTRACT: This article aims to present a contextualised task for learning the part-whole model of fractions based on the use of national flags, and to analyse the resolution strategies and levels of difficulty that arise from its implementation in different educational contexts. The results obtained are analysed from a qualitative phenomenological approach, obtaining evidence of the level of reasoning about fractions put into practice. The task, originally designed for compulsory basic education, is based on the question *What fraction of the flag occupies the colour red?* in front of a selection of different flags. In order to identify specific fraction calculation strategies, this task was implemented with students in basic education and both pre-service and in-service teachers in Spain and Portugal. Six different resolution strategies were identified: visual, decomposition, recomposition, operational, measurement with a graduated ruler and fractional measurements. Likewise, different levels of difficulty were identified depending on whether the flags require graphic strategies or knowledge of geometric properties to calculate the fraction. The proposal favours the development of skills in the calculation, measurement and estimation of fractions and is adaptable to different grades, from 3rd year of primary or basic education onwards, by modifying the selection of flags. The predominance of visual, decompositional and operational additive strategies was observed among students and trainee teachers. The transformation of geometry by recomposition and the use of a graduated ruler to calculate triangular areas were also observed in pre-service and in-service teachers. Notably absent across all participant groups were fractional measurement strategies, as well as subtractive, multiplicative, and quotient-based approaches.

KEYWORDS: rational numbers, basic education, teacher training, problem-solving strategies, part-whole model.

Recibido: 08/01/2025

Aceptado: 08/04/2025

1. INTRODUCCIÓN

Numerosos estudios han demostrado que aprender fracciones presenta dificultades para el alumnado de primaria y secundaria a nivel global. En el origen de estas dificultades es frecuente encontrar una enseñanza apoyada en la vinculación del concepto de número racional a unas pocas representaciones usuales y el aprendizaje memorístico de diversas reglas de operación y transformación entre representaciones (fracciones, decimales y porcentajes) (Makhubele, 2021; Torbeyns et al., 2015).

La no consideración de las fracciones como números en sí mismos y la limitación de las situaciones en los que los números racionales son trabajados reducen la capacidad del estudiantado para manejar conceptos como razón o proporción que son críticos para el aprendizaje del álgebra en niveles superiores (de la Cruz Rodríguez Rojas y Navarrete Rojas, 2020; Makhubele, 2021).

Por otro lado, contextualizar la práctica matemática con la realidad social y cultural de nuestro mundo no es solo un imperativo curricular, sino también un modo de volver las actividades de aula más estimulantes, enriquecedoras e inclusivas, permitiendo al mismo tiempo la integración de disciplinas académicas diversas (Choi y Hannafin, 1997; Graça y Guerreiro, 2016; Martínez Jiménez et al., 2022).

En Portugal, los números racionales son parte del aprendizaje inicial de las matemáticas introduciéndose en el 2º curso de Educación Básica (Ministerio de Educación, 2021), como representación de una cantidad no entera relacionada al modelo parte-todo, siendo el todo una unidad continua. En tercer curso, se amplía el significado parte-todo, siendo el todo una unidad discreta, y se añade el modelo de cociente. Los estudiantes deben comparar y ordenar fracciones con el mismo denominador (3º curso) y con el mismo numerador (4º curso) en diferentes contextos, utilizando múltiples representaciones. En 5º y 6º año (alumnado de 11 a 12 años), las cuatro operaciones elementales se extienden a todas las representaciones de los números racionales no negativos.

En España (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022), los números racionales se introducen formalmente en el segundo ciclo de Educación Primaria, trabajando las fracciones propias hasta el denominador 12 a través del cálculo mental, ordenación y equivalencia, mientras que en el primer ciclo (1º y 2º) se exploran algunas fracciones básicas, mitad, cuarto, tercio, a través del concepto de partición. Ya en el tercer ciclo (alumnado de 11 y 12 años) se formaliza el estudio de los racionales ampliando al conocimiento de los números decimales, hasta la milésima, y los porcentajes y la relación entre ellos para fracciones sencillas. La multiplicación de fracciones se suele introducir en el último año de Primaria si bien no se recoge su estudio a nivel curricular.

Este artículo propone una actividad didáctica contextualizada basada en el modelo parte-todo de las fracciones, utilizando el análisis de banderas de países como recurso para educación básica. Los resultados obtenidos se analizan desde un enfoque cualitativo fenomenológico tras implementarse la actividad en diversos contextos educativos, con alumnado de educación básica y con profesorado en formación y en servicio en España y Portugal. El estudio permite categorizar las estrategias de resolución empleadas, identificar niveles de dificultad asociados a las características de las banderas utilizadas, y evidenciar los distintos niveles de razonamiento fraccionario manifestados por los participantes.

2. Marco Teórico: aprendizaje de las fracciones

2.1. Significados de las fracciones: el modelo parte-todo

Cualquier número racional, entero o no entero, es representable por una fracción donde el numerador N representa un número entero y el denominador D representa un número entero distinto de cero. Kieren (1980) definió los racionales como un constructo formado por cinco significados: (i) la relación parte-todo; (ii) el cociente entre dos números enteros representados por la fracción; iii) el operador partitivo multiplicativo; (iv) la medida; y (v) la razón, relación entre dos cantidades. Investigaciones recientes destacan desafíos no abordados por Kieren, como Norton y Wilkins (2012), que proponen el modelo de fracción como cociente de medidas, y Lamon (2020), que amplía el modelo de operador con ejemplos de escalas, porcentajes y probabilidad.

El modelo parte-todo es el modelo más inmediato y reconocible como introducción a los números racionales. El símbolo, fracción, en este modelo designa a la relación entre una parte y el todo, que es considerado la unidad. El denominador indica el número de partes en las que se divide la unidad y el numerador el número de partes elegidas” (Monteiro y Pinto, 2005, p. 91). Monteiro y Pinto (2005) advierten que esta “relación de la parte con el todo es una relación inherente a los números fraccionarios y que es fundamental destacarla, sea cual sea la situación didáctica, porque el "todo" traduce la unidad fraccionaria” (p. 92). En cantidades continuas, se aborda este modelo trabajando con modelos de área, en los que una parte del todo está sombreada, de manera que "los estudiantes pueden ver cómo las fracciones se relacionan con la unidad, comparar fracciones de un todo y descubrir fracciones equivalentes" (National Council of Teachers of Mathematics, 2007, p. 174).

Esta propuesta se ocupa del modelo parte-todo que es central en el aprendizaje inicial de los números racionales, si bien es necesario destacar la importancia de no dejar fuera del aula el trabajo con el resto de significados de las fracciones para conseguir un aprendizaje relacional significativo (Graça et al., 2021; Lamon, 2020).

2.2. Niveles de aprendizaje de las fracciones

La secuenciación del aprendizaje de los números racionales se basa en sus distintas representaciones numéricas y gráficas y en las distintas definiciones matemáticas relacionadas con las fracciones. Algunos autores proponen la sucesión: fracciones propias con modelos continuos, fracciones impropias y números mixtos con modelos continuos, modelos discretos y operaciones con fracciones (Battista, 2012; Monteiro y Pinto, 2005).

Asimismo, Battista (2012) desarrolla un modelo de razonamiento de los estudiantes sobre las fracciones que distingue ocho niveles de sofisticación:

Nivel 0. No se comprende el concepto de fracción, pero sí la idea de partición.

Nivel 1. Solo se reconocen imágenes de fracciones que son familiares.

Nivel 2. Se entiende la fracción como contar todas las partes existentes y las partes sombreadas.

Nivel 3. Se entiende la fracción como dividir una figura en partes iguales y seleccionar algunas de ellas.

Nivel 4. Se entiende la fracción como dividir una cantidad en partes iguales y seleccionar algunas de ellas.

Nivel 5. Se pueden manipular, física o mentalmente, representaciones visuales de fracciones para resolver problemas aritméticos con fracciones.

Nivel 6. Se realizan y se comprenden de manera intuitiva las operaciones con fracciones a nivel simbólico y algorítmico.

Nivel 7. Se pueden usar dibujos y materiales para resolver problemas aritméticos con fracciones y para comprender cómo funcionan las operaciones con fracciones.

Estos niveles describen la forma en la que el estudiantado razona sobre las fracciones. Los niveles 1 a 3 corresponden a un nivel limitado del concepto de fracción, pasando en el nivel 4 a un concepto más amplio y abstracto. A lo largo de los niveles 5 a 7 se iría desarrollando la capacidad de operar fracciones de forma cada vez más sofisticada.

El objetivo de estos niveles es el de guiar procesos de enseñanza y de aprendizaje estableciendo pequeños pasos graduales que puedan ajustarse a las necesidades del estudiantado. La propuesta de trabajo con banderas se adecúa a la transición entre los niveles 4 y 7 estableciendo distintos niveles de dificultad según la bandera escogida y la estrategia de resolución que se adopte.

Se desarrolla a continuación esta propuesta de aprendizaje de las fracciones, destacándose en los resultados las relaciones entre las resoluciones y justificaciones de las personas participantes con las dificultades y los niveles de aprendizaje recogidos en el marco teórico.

3. Metodología

El estudio presentado asume un enfoque cualitativo e interpretativo en una relación fenomenológica con las acciones de los participantes, apoyadas en sus producciones escritas y las discusiones de aula. Se reconoce al sujeto investigador como aquel que, integrando la realidad, busca comprender los fenómenos en la interacción entre ellos mismos y los contextos estudiados. En este sentido, describir, observar y reportar lo observado es una actitud intencional y natural que define la investigación cualitativa con enfoque fenomenológico (Bicudo, 2006).

Es propósito de la investigación experimentar un material semiestructurado, con potencial didáctico, y comprender su efectividad en diferentes contextos: escolar, con estudiantes de educación básica obligatoria; académico, con futuros docentes de educación primaria y básica; y de capacitación, con docentes de escuelas primarias en servicio.

En términos metodológicos, se asume el papel de sujeto investigador con perspectiva exploratoria, describiendo las experiencias ocurridas en el aula y en otros contextos, reflexionando sobre los datos obtenidos al implementar la tarea con distintos participantes, destacando las evidencias, cuestionando las actuaciones y dando sentido a las acciones, conformando un ensayo final sobre la construcción de una propuesta educativa para el aprendizaje de las matemáticas.

La propuesta consiste en una tarea matemática a partir del uso de las banderas de diferentes países. Las banderas son objetos de identidad de los países y se reconocen como un atributo importante en el contexto social, cultural y político, llegando a estar su diseño regulado por ley. A su vez, son unidades en el sentido geométrico y numérico, en las que las diferentes partes y colores representan una porción del todo. Cada uno de los colores representa una fracción, representación de un número racional, una parte del todo, que es la bandera, siempre que no se consideren los emblemas y símbolos (escudos de armas, estrellas, lunas, cruces, etc.). También hay formas circulares o semicirculares en algunas banderas, que constituyen una situación particular porque la relación entre la región circular y la bandera rectangular tiene como resultado un número irracional.

El color rojo fue seleccionado como referencia para la actividad debido a su predominancia en las banderas a nivel mundial. La tarea consistió en calcular la fracción que ocupa este color, según la relación parte-todo, en cada bandera propuesta.

3.1. Categorización de las banderas del mundo con color rojo

Sin tener en cuenta las banderas sin rojo, que podrían representar una fracción del total igual a cero, clasificamos las banderas en dos grupos principales: región roja continua y región roja discontinua. Cada uno de estos dos grupos incluye subcategorías (Tabla 1):

Tabla 1. *Categorización de banderas con rojo*

Categoría	Subcategoria	País	Bandera
Región roja continua	i) Un solo color	Marruecos	
	ii) Diferentes colores, áreas de idénticas proporciones	Francia	
	iii) Colores distintos, áreas de diferentes proporciones	Portugal	
Región roja discontinua	iv) Diferentes colores, áreas de idénticas proporciones	Austria	
	v) Colores distintos, áreas de diferentes proporciones	España	

Las banderas con una región roja continua se subdividen en: i) un solo color, países como Albania, China, Marruecos, Suiza, Túnez y Turquía (sin tener en cuenta los emblemas y símbolos); ii) colores distintos, con franjas horizontales, verticales, oblicuas o triangulares en proporciones idénticas, países como Alemania, Francia, Italia, Madagascar, Mónaco, Polonia, Rusia (rectangular), Papúa Nueva Guinea y República del Congo (triangular y paralelogramo) (sin tener en cuenta los emblemas y símbolos); y iii) colores distintos, con franjas horizontales, verticales, oblicuas o triangulares o con otras formas poligonales o circulares, en diferentes proporciones, países como Bielorrusia, Camboya, Colombia, Corea del Norte, Costa Rica, Portugal (rectangular), Bahréin, Qatar (rectangular, en el que un lado es en zigzag), Cuba, Eritrea (triangular), Sudáfrica, Chequia, Kuwait (trapezoidal), Seychelles (cuadrilátero irregular), Timor Oriental (pentágono irregular), Samoa (hexágono irregular), Omán (octágono irregular), Bangladesh, Japón (circular) y Corea del Sur (semicircular – yang; sin tener en cuenta los emblemas y símbolos).

Las banderas con una región roja discontinua se subdividen en: iv) de diferentes colores, con franjas horizontales, verticales, oblicuas o triangulares en idénticas proporciones, países como Austria, Mongolia y Uganda (rectangular; sin tener en cuenta los emblemas y símbolos); y v) de distintos colores, con franjas horizontales, verticales, oblicuas o triangulares de diferentes proporciones, países como España, Letonia, Líbano, Tailandia (rectangular, rojo idéntico), Dinamarca, Estados Unidos (rectangular, rojo distinto), Antigua y Barbuda y Trinidad y Tobago (triangular; sin tener en cuenta emblemas y símbolos).

3.2. Implementación en contextos escolares, académicos y formativos

Con el objetivo de evaluar el interés didáctico de la propuesta y de estudiar las estrategias de resolución aplicadas, se implementó esta tarea en diferentes contextos educativos, en los primeros años de escolaridad (3º, 4º y 5º curso), y en la formación docente para los primeros años, tanto de profesionales en formación como en servicio.

El estudio se implementó con estudiantes de 3º y 4º año de educación básica, trabajando con grupos de 24 y 26 alumnos respectivamente. En ambos casos, la actividad se desarrolló en sesiones de hora y media, integradas dentro de una secuencia didáctica sobre números racionales. Dado el vínculo curricular entre matemáticas y geografía europea en estos cursos, se optó por utilizar exclusivamente banderas de los países de la Unión Europea para la actividad. En ellas el rojo representaba 1/2, con regiones rectangulares, continuas y discontinuas; 1/3, con regiones rectangulares, continuas; 2/3, con regiones rectangulares, discontinuas; 3/5, con región continua rectangular; 4/5, con regiones rectangulares, discontinuas; y 3/8, con región continua trapezoidal (Graça y Guerreiro, 2016).

El estudio en 5º año se realizó en el marco de un proyecto de investigación, con un grupo de 20 estudiantes, en tres sesiones de cincuenta minutos cada una, al tratarse de una actividad puramente matemática, se eligieron diferentes banderas, europeas y no europeas, con diferentes características y niveles de dificultad: Banderas en las que el rojo representaba 1 (Marruecos); 1/2, con regiones rectangulares y triangulares, continuas y discontinuas; 1/3, con regiones rectangulares y triangulares, continuas; 3/4, con región continua pentagonal; 2/3, con regiones rectangulares, discontinuas, y rectangulares con un lado es en zigzag continuo (Baréin); 3/5, con región continua rectangular; 4/5, con regiones rectangulares, discontinuas; 3/8, con región continua trapezoidal; y 5/9, con región continua octogonal (Guerreiro, 2023).

En el caso de la formación inicial del profesorado para los primeros años, la tarea tuvo carácter investigativo y se realizó en un contexto académico. Los participantes fueron 74 estudiantes de 2º año del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Córdoba, que trabajaron divididos en tres grupos de unos 25 alumnos en una sesión de una hora; y 40 estudiantes de 3º año de la licenciatura em Educação Básica de la Universidade do Algarve que trabajaron en grupos de 4 personas, en una clase de dos horas de didáctica de las matemáticas. En las banderas seleccionadas para la formación de futuros docentes, el rojo representaba, además de las incluidas en el grupo de 5º de primaria: 5/24, con región continua trapezoidal; 27/35, con regiones rectangulares, discontinuas; 27/65, con regiones rectangulares y discontinuas; y con una región circular (Japón). En una sesión de clase posterior a la implementación, el alumnado universitario analizó las estrategias y dificultades identificadas en la resolución de la tarea y discutió sobre los resultados obtenidos en la misma tarea por estudiantes de 3º, 4º y 5º de educación básica.

En el contexto de la formación continua del profesorado de educación básica, el estudio se desarrolló en dos sesiones prácticas: una de tres horas con 19 profesores y otra de dos horas y media con 16 docentes de los años iniciales. Se persiguió un doble objetivo: la resolución matemática y la formación pedagógica de los profesores. Un conjunto de cuarenta y seis banderas, todas diferentes, distribuidas aleatoriamente entre grupos de docentes, constituyó la base de discusión sobre las características geométricas de las banderas y las estrategias para determinar la fracción de rojo.

Las producciones de los grupos de participantes, docentes en formación y en servicio, fueron realizadas en papel, conteniendo diagramas gráficos de resolución, las operaciones matemáticas realizadas y una descripción escrita del proceso seguido para cada bandera. En el caso de los docentes de educación básica, los datos escritos se complementaron con la grabación en audio de sus explicaciones. Para el análisis, los dos autores codificaron independientemente las estrategias matemáticas empleadas, utilizando una matriz predefinida con categorías como: corrección del resultado, visualización directa, realización de particiones y, uso de operaciones o utilización de regla graduada… Las discrepancias se resolvieron mediante consenso. Los datos en audio se triangularon con las producciones escritas para validar las interpretaciones.

4. Resultados

4.1. Categorización de las estrategias de obtención de la fracción de color rojo

Las estrategias seguidas para hallar la relación entre el área roja y la totalidad de cada bandera se pueden categorizar en diferentes estrategias, desde las más básicas, como la visualización, hasta estrategias más elaboradas, como la de medición fraccionaria.

4.1.1. Estrategia visual

Una de las estrategias más elementales es la visual, que es una forma de análisis apropiada para situaciones en las que la bandera es completamente roja, asumiendo una relación parte-todo igual a la unidad, o en las que el rojo de la bandera es continuo y está formado por franjas rectangulares iguales con diferentes colores, como en el caso de la bandera de Polonia donde el rojo representa 1/2, o la bandera de Francia, donde el rojo representa 1/3.

En el caso de la bandera de Austria, las franjas son idénticas, pero hay dos franjas rojas, por lo que se deduce que el rojo representa 2/3 de la bandera. También en el caso de la bandera de Uganda, que consta de seis franjas de iguales dimensiones, será posible identificar dos franjas rojas en un total de seis franjas, representando así 2/6 o 1/3. Del mismo modo, la identificación visual de las tres franjas idénticas de la bandera de Madagascar, a pesar de su posición relativa no paralela, da como resultado que el rojo de esa bandera represente 1/3. La fracción de rojo en la bandera de Papúa Nueva Guinea también se identifica visualmente como 1/2, ya que es la división de un rectángulo por una de las diagonales, constituyendo dos regiones triangulares idénticas, una roja y otra negra.

En el trabajo con banderas de la Unión Europea, en dos clases, de 3º y 4º, los resultados corroboraron la identificación inmediata de la fracción 1/2 o 1/3 en regiones rojas continuas en banderas compuestas por dos o tres franjas de igual tamaño, con orientación horizontal o vertical. En el caso de la región roja discontinua, como en la bandera de Austria, con tres franjas de igual tamaño, dos rojas en regiones discontinuas y una blanca, los estudiantes expresaron dudas para determinar 2/3, indicando 1/2 al relacionar la fracción con el número de colores.

En la implementación en la clase de 5º curso, los estudiantes mostraron facilidad para identificar la fracción cuando las banderas eran completamente rojas, la mitad roja con dos franjas horizontales o verticales, con la tercera parte roja en tres franjas rectangulares, horizontales o verticales y con tres franjas, dos de ellas rojas, asociando el rojo con dos tercios.

4.1.2. Estrategia de descomposición

La estrategia de descomponer las regiones en partes iguales menores también es una posible aproximación al caso del rojo como región continua en banderas con regiones de diferentes tamaños. Como ejemplos de este caso, con descomposición de las franjas rectangulares, tenemos: i) la bandera de Colombia en la que la división de la franja amarilla en partes iguales da como resultado cuatro franjas de las mismas dimensiones, siendo la franja roja una de cada cuatro, representando 1/4; ii) la bandera de Portugal dividida en dos franjas iguales de color verde y tres bandas iguales de color rojo, donde la relación del rojo con la bandera está representada por 3/5.

En las dos clases, de 3º y 4º curso, los estudiantes comenzaron verificando que el rojo era más grande que el verde en la bandera de Portugal y consideraron que el rojo representaría 2/3. Sin embargo, algunos estudiantes encontraron que el rojo no era el doble que el verde y, por lo tanto, la fracción no era correcta. Un estudiante argumentó que el verde era un poco más grande que 1/3. Los estudiantes de 4º grado determinaron la fracción de 3/5 para el rojo.

La división de la bandera de Samoa en regiones cuadradas iguales vertical y horizontalmente da como resultado tres cuadrados rojos de un total de cuatro, representando 3/4 de rojo. También existen estrategias de descomposición en regiones triangulares, como la bandera de Timor Oriental, en la que la división en partes iguales por líneas verticales, horizontales y diagonales da como resultado ocho triángulos congruentes siendo seis rojos, es decir, 6/8 o 3/4. (Figura 1).

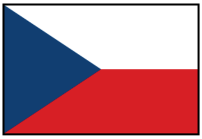
Figura 1. *Bandera de Timor Oriental descompuesta en partes iguales*

La bandera de República del Congo, con tres franjas de colores distintos, también se puede descomponer en regiones congruentes, dividiendo verticalmente en tercios, horizontalmente en medios, y luego dividiendo los cuadrados en triángulos por una de sus diagonales (Figura 2). De este proceso, resulta que cada color ocupa cuatro triángulos, suponiendo el rojo 4/12 o 1/3.

Figura 2. *Bandera de República del Congo descompuesta en partes iguales*

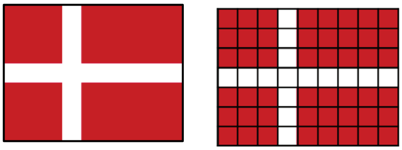
La misma estrategia se puede utilizar en la bandera de Chequia con la descomposición por división en dos partes iguales verticalmente, dos partes iguales horizontal y diagonalmente (Figura 3): se tendrían tres partes rojas de un total de ocho, es decir, 3/8.

Figura 3. *Bandera de Chequia descompuesta en partes iguales*



En el contexto de formación inicial del profesorado, los estudiantes presentaron estrategias para descomponer las banderas en múltiples cuadrados, como en el caso de la bandera de Dinamarca (Figura 4), que se dividió en nueve partes iguales verticalmente y siete partes iguales horizontalmente, dando como resultado 63 cuadrados, de los cuales 48 son rojos.

Figura 4. *Bandera de Dinamarca con y sin descomposición*

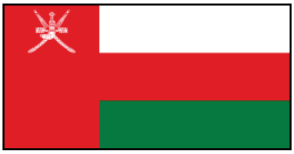


En este contexto, los futuros profesores también dividieron la bandera bareiní (Figura 5), con una red de rombos que descansan sobre los vértices en el lado en zigzag y compusieron los rombos incompletos de los bordes, llegando a una fracción aproximada.

Figura 5. *Bandera de Baréin*

En el contexto de la formación del profesorado, en el caso de la bandera bareiní, los profesores la dividieron en ocho franjas verticales iguales y consideraron 5,5 partes rojas para las 8 partes, en una proporción de 11/16. En el caso de la bandera omaní (Figura 6), los profesores dividieron la bandera en 9 rectángulos iguales (3 por 3) y obtuvieron 5/9.

Figura 6. *Bandera de Omán*



Con Kuwait (Figura 7), los profesores dividieron la bandera en cuatro franjas verticalmente y tres franjas horizontalmente, cada uno de los rectángulos por la mitad en triángulos, obteniendo 24 triángulos, de los cuales 7 son rojos, tenemos 7/24.

Figura 7. *Bandera de Kuwait*

Algunas de las estrategias de división en partes iguales no obtuvieron la razón adecuada debido a divisiones incorrectas.

Existirían otras estrategias de descomposición para estas u otras banderas. No obstante, tan solo se pretende aquí ilustrar algunas posibilidades.

4.1.3. Estrategia de recomposición

Las estrategias de recomposición implican la descomposición en partes y la composición de estas buscando unificar la parte roja en banderas en las que es discontinua. Esta estrategia se utiliza en banderas como: i) Antigua y Barbuda, en la que la división vertical en dos partes iguales da como resultado la composición de dos triángulos rojos y dos triángulos no rojos, con la región discontinua roja que representa 1/2 o 2/4 de la bandera; ii) España, donde análogamente, la traslación de las dos franjas rojas da, por recomposición una franja equivalente a la amarilla, representando 1/2; iii) Baréin (Figura 5), dividida con una línea por el punto medio de la zona dentada, permite la recomposición de los triángulos a un lado y otro de la línea para completar un rectángulo rojo de 2/3 del total.

En las clases de 3º y 4º curso las banderas con franjas de diferentes tamaños o en regiones no continuas, como la bandera española, presentaron mayores dificultades para identificar la fracción correspondiente. En el caso de la bandera española, los estudiantes concluyeron que "Dos partes rojas hacen una amarilla" [4º grado] y que $2/4 = 1/2$.

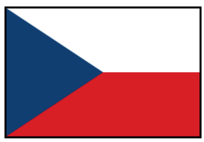
Similar a lo anterior, la bandera de Trinidad y Tobago también se puede descomponer en triángulos y recomponer de la parte roja para calcular la fracción correspondiente. Si dividimos la bandera en tres partes iguales verticalmente y posteriormente trasladamos los dos triángulos rojos de la franja central hacia las laterales para completarlas, observamos que tenemos $2/3$ de rojo (Figura 8).

Figura 8. *Bandera de Trinidad y Tobago descompuesta y recompuesta*

4.1.4. Estrategias operacionales

Las estrategias operacionales son aquellas que involucran las cuatro operaciones aritméticas básicas. Una estrategia aditiva se puede ilustrar en dos situaciones: i) resultante de la combinación de la estrategia visual con la adición de dos o más partes iguales, como por ejemplo en la bandera de Austria en la que se podría agregar cada una de las franjas, siendo $1/3 + 1/3 = 2/3$; ii) resultante de la estrategia de descomposición con la adición de partes iguales o distintas, como por ejemplo en la bandera de Chequia (Figura 9) con $1/4 + 1/8 = 3/8$.

Figura 9. *Bandera de Chequia*



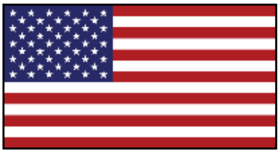
En las dos clases, de 3º y 4º año de escolaridad, la identificación de la fracción roja en la bandera de Chequia también resultó en una dificultad para asociar el número de colores distintos con el número de partes iguales geométricamente equivalentes: “Un tercio, la bandera tiene tres partes, el blanco, el azul y el rojo” (4º grado); “Toda la figura se divide en tres partes” (3º año). Sin embargo, un alumno de 4º grado definió la estrategia de descomponer la bandera en partes geométricamente iguales, dividiendo la bandera por la mitad vertical y horizontalmente y, posteriormente, dividiendo uno de los cuartos de la bandera en dos mitades, concluyendo que "la parte roja es un cuarto y medio (mitad de 1/4)".

Una estrategia sustractiva se puede ilustrar considerando la determinación del área no roja y, en consecuencia, la fracción del área complementaria. Un ejemplo es la bandera de Samoa, que después de ser dividida por la mitad vertical y horizontalmente, la parte no roja representa 1/4, donde la parte roja será 1 – 1/4 = 3/4.

Una estrategia multiplicativa combinada con una estrategia aditiva da como resultado regiones rojas, como en el caso de la bandera omaní (Figura 6), en la que la franja vertical roja es 1/3 de la bandera y la franja horizontal roja es 1/3 de 2/3 de la bandera. De esta forma tendremos, 1/3 + 1/3x2/3 = 1/3 + 2/9 = 5/9.

La estrategia multiplicativa combinada con la estrategia sustractiva es una posibilidad para calcular la región roja de la bandera de los Estados Unidos de América (Figura 10). Si la bandera consistiera solo en las franjas rojas y blancas, la región roja sería 7/13. Así que tenemos que calcular el área de las rayas rojas en la parte azul con las estrellas blancas. Horizontalmente, la parte azul es 2/5 de la bandera. Verticalmente, los rojos están a 4/13 de la bandera. Por lo tanto, 7/13 – 2/5 x 4/13 = 7/13 – 8/65 = 27/65.

Figura 10. *Bandera de los Estados Unidos de América*



Una posible estrategia multiplicativa combinada con una estrategia aditiva es aplicable a la bandera de Chequia (Figura 9) en la que tenemos 1/4 de rojo más 1/2 de 1/4, es decir, 1/4 + 1/2 x 1/4 = 1/4 + 1/8 = 3/8.

Una estrategia divisiva combinada con una estrategia sustractiva también da como resultado la bandera de Chequia (Figura 9) en la que el triángulo azul es 1/4 y la bandera restante es 3/4, lo que da como resultado que el rojo sea la mitad de 3/4, es decir, 3/8, porque las regiones roja y blanca son idénticas.

4.1.5. Mediciones fraccionarias

Las mediciones fraccionarias son entendidas como una estrategia basada en el uso de fórmulas y unidades de medida que vienen de aplicar la relación parte-todo entre dos segmentos. Este sería el caso de la bandera de Cuba (Figura 11) en la que el área del triángulo rojo es 1/5 de la bandera, dado que la base del triángulo es aproximadamente igual a la altura del rectángulo, por lo tanto, la unidad; la altura del triángulo es 2/5 del ancho del rectángulo; lo que resulta, usando la fórmula para calcular el área de un triángulo, que (12/5x)/2 = 1/5.

Figura 11. *Bandera de Cuba*

Esta misma estrategia se puede pensar para la bandera de Dinamarca (Figura 4) con un cambio por traslación de las franjas blancas (Figura 12) y, posteriormente, el cálculo del área del rectángulo rojo, siendo el rojo 6/7 de la altura y 8/9 de la anchura, lo que resulta calculando el área del rectángulo, 6/7 x 8/9 = 48/63 = 16/21.

Figura 12. *Bandera de Dinamarca reconfigurada para agrupar las áreas de color rojo*

El cálculo de la fracción roja en regiones trapezoidales, como la bandera de Kuwait (Figura 7) también puede resultar de la misma estrategia de medición fraccionaria en la que la altura del trapecio rojo es 1/3, la base mayor es 1 y la base menor es 3/4, lo que resulta, por la fórmula de cálculo del área trapezoidal, [(1+3/4)/2]x1/3 = 7/24.

La combinación de la estrategia de mediciones fraccionaria con la estrategia sustractiva es adecuada para la bandera de Seychelles (Figura 13). Si juntamos los triángulos verde y blanco, tenemos un triángulo rectángulo con la base de una unidad y una altura de 2/3, lo que da como resultado un área de 1/3. Del mismo modo, si juntamos los triángulos azul y amarillo, tenemos un solo triángulo rectángulo de una unidad de altura y $2/3$ de base, lo que también da como resultado un área de $1/3$. Por lo tanto, el área de la región roja será $1 - 1/3 - 1/3 = 1/3$.

Figura 13. *Bandera de Seychelles*

En el caso de Seychelles (Figura 13), el profesorado de educación básica comenzó dividiendo la bandera en diagonal (vértice inferior izquierdo a vértice superior derecho) y observó que la altura de todos los triángulos es igual, así como las bases, y, por lo tanto, cada uno de los triángulos (en cada una de las partes) representa $1/3$ de la mitad de la bandera, es decir, $1/6$. Por lo tanto, se deduce que la región roja es $1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3$.

4.1.6. Medición con regla graduada

La medición de las banderas con una regla graduada es una estrategia basada en el uso de fórmulas y unidades de medida del sistema internacional de longitud y área. El procedimiento consiste en usar la regla para calcular del área total de la bandera y el área de la región roja, hallar la razón entre ambas áreas y finalmente aproximar dicha razón a una fracción.

El estudiantado de educación básica utilizó la medición con regla graduada en algunas banderas, para validar o invalidar visualmente determinadas razones. En banderas complejas conteniendo triángulos y trapecios, el estudiantado universitario optó por determinar con regla las medidas de la bandera y de las regiones rojas, calculando las áreas respectivas a través de fórmulas. Algunos de estos estudiantes no lograron relacionar las mediciones con el cálculo de la fracción pedida, dividiendo solo la parte por el todo y expresando el resultado como número decimal.

En el caso de la región roja trapezoidal de Sudáfrica, el profesorado de educación básica calculó el área del trapecio y la bandera basándose en las medidas obtenidas por una regla graduada. En la bandera cubana (Figura 11), también utilizó la regla graduada para calcular las áreas del triángulo rojo y la bandera y luego comprobaron cuántas veces cabe el área del triángulo en el área de la bandera, obteniendo $1/5$. En el caso de Seychelles (Figura 13), optaron por dividir la bandera en diagonal, obteniendo dos triángulos rojos y calcularon su área utilizando una regla graduada.

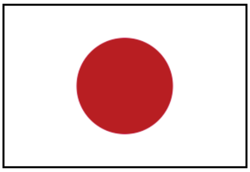
Algunas de las estrategias de cálculo de áreas con regla graduada no obtuvieron la razón adecuada debido a cálculos incorrectos.

También con el profesorado en activo, surgió una estrategia para dividir la bandera de los Estados Unidos de América (Figura 10) en 65 rectángulos, basados en medidas con una regla graduada, con las 13 franjas horizontales y 5 franjas iguales verticales. Después, se quitaron del total los rectángulos azules y blancos obteniendo 27 rojos y una fracción de $27/65$.

4.1.7. Razones irracionales

Las banderas con un círculo rojo, como el caso de Japón (Figura 14), constituyen una posibilidad de discusión sobre los números racionales e irracionales. En este caso, independientemente de las proporciones entre el diámetro del círculo rojo y los lados del rectángulo de la bandera, la relación es un número irracional. La bandera de Japón tiene las siguientes medidas: horizontalmente el diámetro del círculo es $4/10$ de la bandera y verticalmente el diámetro es $3/5$ de la bandera. Por lo tanto, podemos considerar que el área de la bandera, en función del radio del círculo rojo, será 5r (horizontalmente) y $10/3r$ (verticalmente), lo que da como resultado un área igual a $50/(3r$^$2\ )$. Por lo tanto, la relación del rojo será $(\pi r$^$2)/(50/(3r$^$2\ )) = 3\pi/50$, un número irracional.

Figura 14. *Bandera de Japón*

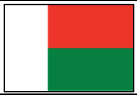
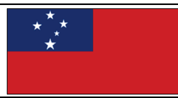
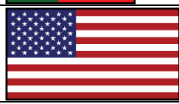
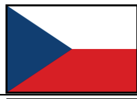


En este caso, los futuros profesores y los profesores en servicio calcularon las áreas respectivas midiendo con regla y hallaron la relación entre ellas redondeando los resultados, sin ninguna reflexión sobre el carácter irracional del resultado.

4.2. Niveles de dificultad identificados

A partir de los resultados presentados se reconoce la existencia de distintos niveles de dificultad en función de que requieran estrategias visuales o de medición y conocimiento de propiedades geométricas de las figuras (Tabla 2):

Tabla 2. *Niveles de dificultad de resolución de la tarea matemática*

Nivel de dificultad	Descripción bandera	País	Bandera
Cero	Rojas completas.	Marruecos	
Uno	Con franjas rectangulares verticales u horizontales de igual tamaño, en las que una de las franjas es roja.	Francia	
Dos	Con dos áreas triangulares o con áreas rectangulares no paralelas de igual tamaño, en las que una de las franjas es roja.	Madagascar	
Tres	Con franjas rectangulares verticales u horizontales de igual tamaño, en las que dos o más de las franjas son rojas.	Austria	
Cuatro	Con franjas rectangulares verticales u horizontales o con áreas rectangulares no paralelas en una relación entera entre las áreas, donde una o más de las franjas son rojas.	España	
Cinco	Con áreas poligonales en una relación entera entre áreas, donde una o más de las franjas son rojas.	Samoa	
Seis	Con franjas rectangulares verticales u horizontales en una relación no entera entre las áreas, con el área roja continua.	Portugal	
Siete	Con franjas rectangulares verticales u horizontales, no incluidas anteriormente, en las que el área roja es discontinua.	Estados Unidos	
Ocho	Sin franjas rectangulares en una relación entera no directa o en una relación no entera entre las áreas, donde el área roja es continua o discontinua.	República del Congo Chequia	 
Nueve	Sin franjas rectangulares, no incluidas anteriormente, en las que el área roja, continua o discontinua, solo puede ser calculada a partir la medición y el uso de relaciones geométricas.	Seychelles	

Los problemas se organizan en tres grupos según su complejidad: (1) niveles cero a tres, resolubles mediante estrategias visuales directas; (2) niveles cuatro a siete, que requieren descomposición rectangular (precisando mediciones en los niveles seis y siete); y (3) niveles ocho y nueve, que exigen descomposición triangular, siendo necesario en el nivel nueve el uso de mediciones y fórmulas para su resolución.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Se ha presentado en este trabajo una propuesta docente contextualizada para el aprendizaje del modelo parte-todo de las fracciones basada en el estudio de banderas de países.

Tras el análisis cualitativo fenomenológico de la implementación en diversos contextos, alumnado de 3º, 4º y 5º de Educación Básica en Portugal y profesorado de Educación Básica en formación y en servicio en Portugal y España, se han identificado seis estrategias de resolución, en relación creciente de sofisticación, y se ha demostrado la flexibilidad de la tarea reconociéndose nueve niveles de dificultad dependiendo de las características geométricas de las banderas escogidas.

Estas estrategias se adscriben a los niveles de razonamiento definidos por Battista (2012): El paso del nivel 4 al 5, que lleva del reconocimiento de la fracción como división en partes iguales a la manipulación de representaciones para hallar fracciones, se relaciona con las estrategias: visual, con regiones discontinuas y partes desiguales, de descomposición y de recomposición. El paso del nivel 5 al 6 y al 7, que lleva de la comprensión de operaciones con fracciones a nivel simbólico al uso de representaciones para comprender cómo funcionan dichas operaciones, se reconoce en las estrategias operacionales y de medición fraccionaria.

En el alumnado más joven (3º y 4º), las dificultades al emplear estrategias visuales surgen al confundir fracciones con el mero conteo de partes o colores, ignorando la magnitud real de dichas partes, lo que coincide con los hallazgos de Siebert y Gaskin (2006). Por su parte, el estudiantado universitario presentó dificultades en la trasposición de decimales obtenidos en la estrategia de medición con regla a fracciones, confirmando la dificultad de la consideración numérica de las fracciones frente a la de otras notaciones, como la decimal (Iuculano y Butterworth, 2011).

En el estudiantado de educación básica y en el profesorado en formación se observa el predominio de las estrategias visuales en el caso de banderas con franjas rectangulares de las mismas dimensiones, la descomposición de la bandera en partes iguales, y las estrategias aditivas en situaciones de región roja discontinua. En el profesorado en formación y en servicio se añaden también el uso de la regla graduada para el cálculo de áreas de regiones triangulares y la recomposición de la geometría. Finalmente, se detectó la ausencia de estrategias sustractivas, multiplicativas y cocientes, de estrategias de medición fraccionaria, con la excepción de la bandera de Seychelles en el grupo de profesorado en activo, y de la consideración del carácter irracional de las banderas con círculos.

El recurso didáctico presenta un valor cultural capaz de establecer conexiones entre las matemáticas y el mundo real, aunque se limita a cantidades continuas y fracciones propias, requiriendo complementarse con otros modelos. Este estudio, de naturaleza cualitativa y exploratoria, sugiere en el futuro ampliar la recogida y análisis de datos con perspectiva cuantitativa. Como siguiente paso, se propone diseñar un modelo didáctico basado en conjuntos de banderas adaptados a los niveles de los participantes, de manera que se puedan sistematizar y categorizar estrategias para dirigir la adquisición de los niveles de razonamiento sobre las fracciones.

Agradecimientos

Agradecemos la colaboración de la profesora Mercedes Tubino Blanco en la revisión de este texto.

Referencias bibliográficas

Battista, M. T. (2012). *Cognition-based assessment & teaching of fractions: building on students' reasoning*. Heinemann.

Bicudo, M. A. V. (2006). Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. En M. C. Borba y J. L. Araújo (Orgs.), *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática* (pp. 101-116).

Choi, J.-I. y Hannafin, M. (1997). The effects of instructional context and reasoning complexity on mathematics problem-solving. *Educational Technology Research and Development*, *45*(3), 43-55. https://doi.org/10.1007/BF02299728

de la Cruz Rodríguez Rojas, P. y Navarrete Rojas, C. A. (2020). Influencia del conocimiento profundo del profesor sobre fracciones en el aprendizaje de alumnos de 4º grado. *Revista Electronica de Investigacion Educativa*, *22*(1), 1-18. https://doi.org/10.24320/REDIE.2020.22.E10.2285

Graça, S. y Guerreiro, A. (2016). Bandeiras dos Países: Recurso para o ensino dos racionais. En A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo y L. Santos (Eds.), *Livro de atas do EIEM 2016. Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 129-141). SPIEM.

Graça, S., Da Ponte, J. P. y Guerreiro, A. (2021). Quando As Frações Não São Apenas Partes de Um Todo…! *Educação Matemática Pesquisa : Revista Do Programa de Estudos Pós-Graduados Em Educação Matemática*, *23*(1), 683-712. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p683-712

Guerreiro, C. (2023). *Números Racionais: um estudo com bandeiras de países no 2.º ciclo do ensino básico.* (Relatório de Prática de Ensino Supervisionada, Universidade do Algarve). Repositório da Universidade do Algarve.

Iuculano, T. y Butterworth, B. (2011). Rapid Communication: Understanding the Real Value of Fractions and Decimals. Quarterly Journal of Experimental Psychology, *64*(11), 2088-2098. https://doi.org/10.1080/17470218.2011.604785

Kieren, T. E. (1980). The Rational Number Construct: Its Elements and Mechanisms. En T. E. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning* (pp. 125-150). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Lamon, S. J. (2020). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003008057

Makhubele, Y. E. (2021). The Analysis of Grade 8 Fractions Errors Displayed by Learners Due to Deficient Mastery of Prerequisite Concepts. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *16*(3), em0645. https://doi.org/10.29333/iejme/11004

Martínez Jiménez, E., Nolla de Celis, Á. y Fernández de Ahumada, E. (2022). The City as a Tool for STEAM Education: Problem-Posing in the Context of Math Trails. *Mathematics*, *10*(2995), 1-17. https://doi.org/https://doi.org/10.3390/math10162995

Ministério da Educação (2021). A*prendizagens Essenciais da Matemática*. Editorial do Ministério da Educação – Direção Geral da Educação.

Monteiro, C. y Pinto, H. (2005). A Aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, *14*(1), 89-107.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. APM - NCTM.

Norton, A. y Wilkins, J. L. M. (2012). The Splitting Group. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(5), 557-583. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.5.0557

Real Decreto 157/2022, de 1 de Marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria, 24386 (2022). https://www.boe.es

Siebert, D. y Gaskin, N. (2006). Creating, Naming, and Justifying Fractions. *Teaching Children Mathematics*, *12*(8), 394-400. http://www.jstor.org/stable/41198803

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z. y Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction*, *37*, 5-13. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002